Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Fakultät II – Informatik, Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Department für Informatik

Propädeutikum Mathematik und Theoretische Informatik

Autoren

Lars Elend und Hannah Meyer

Oldenburg, 19. September 2023

Vorwort

Das vorliegende Skript dient als Grundlage für das Propädeutikum in Mathematik und Theoretischer Informatik, welches jährlich für Studienanfänger der Fächer Informatik und Wirtschaftsinformatik an der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg angeboten wird.

Das Propädeutikum wird von der Fachschaft Informatik angeboten. Bei Fragen wenden Sie sich bitte an die beiden Autoren dieses Skriptes oder die Fachschaft Informatik der Universität Oldenburg. Die Rechte an diesem Skript verbleiben bei Lars Elend und Hannah Meyer.

Das Skript orientiert sich an dem Skript der Fachschaft Mathematik und dem Vorgängerskript von Dorothea Strauer. An dieser Stelle möchten wir allen Beteiligten unseren Dank aussprechen. Die Autoren werden am Ende jedes Kapitels genannt.

Falls du Fehler im Skript findest oder Verbesserungsvorschläge hast, wende dich gerne an die E-Mail-Adresse:

matheskript@fachschaft-informatik.de

Viel Erfolg im Propädeutikum und beim Studienbeginn!

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagenlogik

Das erste Teilgebiet der Mathematik und Informatik, was wir euch vorstellen möchten, ist die Aussagenlogik. Diese bildet die Basis für die meisten anderen im Propädeutikum behandelten Gebiete.

1.1 Aussagen

Wir definieren zunächst, was wir unter einer Aussage verstehen:

Definition 1.1 (Aussage)

Eine **Aussage** ist ein Satz, dem sich ein eindeutiger Wahrheitswert *wahr* (kurz w bzw. 1) oder *falsch* (kurz f bzw. 0) zuordnen lässt.

Festlegungen, die ein neues Objekt einführen und erklären, heißen in der Mathematik *Definition*. Aus einer solchen formalen Beschreibung lassen sich Beispiele ableiten, die die Festlegungen der Definition erfüllen.

Beispiele:

- „Annika schwimmt im Wasser."
- „13 ist eine Primzahl und der Himmel ist blau."
- „Diese Kuh ist schwarz oder lila."
- „Es gibt rosa Elefanten, also besteht der Mond aus Käse."

Es spielt übrigens keine Rolle, ob wir den Wahrheitswert einer Aussage kennen. Wichtig ist nur, dass der Aussage theoretisch ein Wahrheitswert zugeordnet werden kann. Folgende Formulierungen sind daher keine Aussagen:

Gegenbeispiele:

- „Schwimmt Annika im Wasser?"
- „Bleib stehen!"
- „Raucher sterben früher." – Früher als wer? Zu ungenau!

Möchte man sich Schreibarbeit ersparen, so kann man eine Aussage mit einem Großbuchstaben (A, B, ...) abkürzen:

Beispiel:

$\underbrace{\text{„Annika schwimmt im Wasser."}}_{=:\,A}$

Das Zeichen „:=" aus obigem Beispiel wird wie „... wird definiert als ..." gelesen. Beachte, dass der Doppelpunkt stets auf die Seite des Gleichheitszeichens kommt, wo sich das zu definierende, vorher nicht bekannte Objekt (hier A) befindet.

1.2 Junktoren

Logische Aussagen lassen sich mittels sogenannter *Junktoren* zu weiteren Aussagen verknüpfen. Abhängig von den Wahrheitswerten der beteiligten Aussagen definieren wir die Wahrheitswerte der zusammengesetzten Aussagen.

1.2.1 Negation

Definition 1.2 (Negation)

Die **Negation** der Aussage A (auch: logisches NICHT) bezeichnen wir mit $\neg A$ oder $\overline{A}$. Negation verändert den Wahrheitswert von wahr auf falsch oder umgekehrt.

Beispiel:
Bezeichnet M die Aussage

„Heute ist Montag“,

so bezeichnet $\neg M$ die Aussage

„Heute ist nicht Montag“.

Wir können die Definition der Negation kürzer in einer sogenannten *Wahrheitswerttafel* (WWT) darstellen:

A	$\neg A$
f	w
w	f

Hier werden alle möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte von an der neuen Aussage beteiligten Aussagen links aufgelistet und rechts der Wahrheitsweit der neuen Aussage notiert. Deutlicher wird dies bei der Konjunktion, da hier zwei Aussagen beteiligt sind.

1.2.2 Konjunktion

Definition 1.3 (Konjunktion)

Die **Konjunktion** der Aussagen A und B (auch: logisches UND) bezeichnet man mit $A \wedge B$. Die Konjunktion ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.

Beispiel:
Wir betrachten die Aussagen

$$R := \text{„Rosen sind rot“},$$
$$V := \text{„Veilchen sind blau“}.$$

Dann bedeutet $R \wedge V$

„Rosen sind rot und Veilchen sind blau“.

Auch hier können wir die WWT aufstellen:

A	B	$A \wedge B$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

1.2.3 Disjunktion

Definition 1.4 (Disjunktion)

Die **Disjunktion** der Aussagen A und B (auch: logisches ODER) bezeichnet man mit $A \vee B$. Die Disjunktion ist nur dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen wahr ist.

Beispiel:
Wir betrachten die Aussagen

$$A := \text{„Du räumst dein Zimmer auf“,}$$
$$E := \text{„Es gibt Ärger“.}$$

Dann bedeutet $A \vee E$

„Du räumst dein Zimmer auf <u>oder</u> es gibt Ärger“.

Die WWT lautet wie folgt:

A	B	$A \vee B$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

Bemerkung: Beachte, dass die Wahrheitswerte nicht dem intuitiven Gebrauch des Wortes „oder“ entsprechen. Man würde vermuten, dass $A \vee E$ falsch ist, wenn A und E beide wahr sind (sog. exklusives ODER). Dies ist jedoch nicht der Fall! In der Mathematik ist es auch möglich, dass du dein Zimmer aufräumst und trotzdem Ärger bekommst.

1.2.4 Implikation

Definition 1.5 (Implikation)

Die **Implikation** der Aussage B aus A (auch: logische Folgerung) bezeichnet man mit $A \Rightarrow B$. Die Implikation ist nur dann falsch, wenn aus etwas Wahrem etwas Falsches geschlossen wird.

Beispiel:
Wir betrachten die Aussagen

$$K := \text{„Ich schenke meinem Tutor Kekse“.}$$
$$G := \text{„Mein Tutor ist glücklich“,}$$

Dann bedeutet $K \Rightarrow G$

„<u>Wenn</u> ich meinem Tutor Kekse schenke, <u>dann</u> ist mein Tutor glücklich“.

Die Implikation wird durch diese WWT beschrieben:

A	B	$A \Rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

1.2.5 Äquivalenz

Definition 1.6 (Äquivalenz)

Die **Äquivalenz** (auch: logische Gleichwertigkeit) der Aussagen A und B bezeichnet man mit $A \Leftrightarrow B$. Die Äquivalenz ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben.

Beispiel:
Wir betrachten wieder die Aussagen G und K von oben. Dann bedeutet $G \Leftrightarrow K$

„Mein Tutor ist genau dann glücklich, wenn ich ihm Kekse schenke“.

Auch hier die WWT:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

1.2.6 Klammerung

Natürlich kann man mit den eingeführten Junktoren nicht nur Aussagen wie A, B, C verknüpfen, sondern auch Aussagen, welche ihrerseits bereits Junktoren enthalten. Um hier die Auswertungsreihenfolge klarzumachen, werden Klammern verwendet. Diese haben dann dort die gleiche Bedeutung wie in der Mathematik: Ausdrücke in Klammern werden zuerst ausgewertet. Zum Sparen von Klammern vereinbaren wir in dieser Veranstaltung[1], dass die Verknüpfungen (absteigend) folgende Prioritäten besitzen:

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow$$

Beispiel: Wir untersuchen die möglichen Wahrheitswerte der Aussage

$$(\neg B \vee A) \wedge (A \Rightarrow B) \ =:\ C.$$

A	B	$\neg B$	$\neg B \vee A$	$A \Rightarrow B$	C
f	f	w	w	w	w
f	w	f	f	w	f
w	f	w	w	f	f
w	w	f	w	w	w

[1] In anderen Veranstaltungen kann dies anders vereinbart werden!

1.3 Tautologie, Widerspruch und Äquivalenz

Im vorhergehenden Kapitel haben wir gesehen, dass der Wahrheitswert von Verknüpfungen von den Wahrheitswerten der beteiligten Einzelaussagen abhängt. Manche Verknüpfungen besitzen jedoch unabhängig von den Einzelaussagen immer den selben Wahrheitswert.

Definition 1.7 (Tautologie)

Eine Aussage, welche stets wahr ist, nennen wir **Tautologie**.

Definition 1.8 (Widerspruch)

Eine Aussage, welche stets falsch ist, nennen wir **Widerspruch**.

Da uns bei einer Aussage mehr ihr Wahrheitswert als ihr genauer Aufbau interessiert, ist es sinnvoll, eine Gleichwertigkeit in diesem Sinne zu definieren.

Definition 1.9 (Äquivalenz)

Zwei Aussagen A und B heißen **äquivalent**, geschrieben $A \equiv B$, falls sie stets den selben Wahrheitswert besitzen.

Bemerkung: Für Aussagen A und B gilt genau dann $A \equiv B$, wenn $A \Leftrightarrow B$ eine Tautologie ist. Es steht also das Zeichen „$\Leftrightarrow$“ innerhalb einer Aussage, während „$\equiv$“ Aussagen bezüglich ihres Wahrheitswertes vergleicht.

1.4 Wichtige Regeln

Wie wir gesehen haben, sind Wahrheitstafeln eine Möglichkeit, aussagenlogische Ausdrücke auszuwerten. Bei größeren Ausdrücken sind Wahrheitstafeln aber unpraktikabel, da sie schnell zu komplex und umfangreich werden. Sind zwei Aussagen A und B äquivalent, so kann in der Aussagenlogik statt Ausdruck A auch Ausdruck B verwendet werden ohne den Inhalt einer Aussage zu verändern. Daraus ergeben sich folgende Regeln, mit denen Ausdrücke umgeformt werden können:

Satz 1.10

Kommutativgesetz:	$A \wedge B \equiv B \wedge A$
	$A \vee B \equiv B \vee A$
Assoziativgesetz:	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
Distributivgesetz:	$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
	$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
Regel von de Morgan:	$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
Implikationselimination:	$(A \Rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$
Äquivalenzelimination:	$(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
Absorbtionsregel:	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$
Doppelnegation:	$\neg\neg A \equiv A$
Kontraposition:	$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Exemplarisch zeigen wir die erste Regel von de Morgan[2]:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
f	f	f	w	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w
w	f	f	w	f	w	w
w	w	w	f	f	f	f

Die vierte und die letzte Spalte der WWT enthalten die selben Wahrheitswerte. Also sind $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ tatsächlich äquivalent.

Autoren dieses Kapitels:

2016: Hannah Meyer

2013: Carsten Cordes, Maike Schwammberger

[2] Augustus De Morgan; englischer Mathematiker.

2 Mengenlehre

In diesem Kapitel werden die Definition und die Schreibweisen von Mengen sowie deren Verknüpfungen vorgestellt. Wir beginnen mit der Definition und betrachten danach einige Beispiele.

Definition 2.1 (Menge)

Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Diese Objekte m nennen wir **Elemente** von M und schreiben kurz: $m \in M$ („m ist Element aus M“) .
Um auszudrücken, dass ein Element x nicht in M enthalten ist, wird $x \notin M$ geschrieben.

Beispiele:

- J sei die Menge der Jahreszeiten. Dann ist *Sommer* ein Element aus J.
- F sei die Menge der Farben: *rot*, *blau* und *grün*.
- S sei die Menge der Augensummen beim Würfeln mit zwei Würfeln (also: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 und 12).
- Z sei die Menge mit den Zahlen $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$ und $\frac{8}{4}$.
- G sei die Menge der heutigen Mensagerichte.

Gegenbeispiel:

- L sei die Menge der leckeren heutigen Mensagerichte (G).

  Dies ist eine **unzulässige Beschreibung** da „lecker“ nicht eindeutig definiert ist. Im Grunde wird versucht, die Elemente g der Menge G auszuwählen, für die eine bestimmte Aussage zutrifft, und zwar „g ist lecker.“ Daher kann hier auch auf das vorherige Kapitel (Aussagenlogik) verwiesen werden, in dem eine solche Aussage als unzulässig erklärt wird (s. Abschnitt 1.1).

Definition 2.2 (Leere Menge)

Die **Leere Menge** enthält keine Elemente und wird als $\{\ \}$ oder $\emptyset$ geschrieben.

2.1 Darstellung von Mengen

Um Mengen kurz und aussagekräftig beschreiben zu können, werden drei Darstellungsarten genutzt, die im Folgenden anhand einiger der vorherigen Beispiele erläutert werden.

Bei der *aufzählenden Schreibweise* werden alle Elemente der Menge in geschweiften Klammern mit Kommata separiert notiert. Falls die Menge Kommazahlen enthält, werden Semikola zur Trennung genutzt. Die aufzählenden Schreibweise funktioniert nur, falls die Anzahl der Elemente endlich ist.

Beispiele:

- $J = \{\text{Frühling}, \text{Sommer}, \text{Herbst}, \text{Winter}\}$
- $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- $Z = \{0,25;\ 0,5;\ 0,75;\ 1;\ 1,25;\ 1,5;\ 1,75;\ 2\}$

Bei Mengen mit vielen Elementen, die nach einem bestimmten Muster aufgebaut wird, kann zur Vereinfachung auch die *elliptische Schreibweise* genutzt werden. Hierbei werden nur so viele Elemente aufgezählt, wie für das Erkennen eines Bildungsgesetzes benötigt werden. Falls die Menge endlich sein soll, muss außerdem das letzte Element angegeben werden. Die Aussparung (Ellipse) wird durch drei Punkte kenntlich gemacht.

Beispiele:

- $S = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$
- $Z = \{0,25;\ 0,5;\ 0,75; \ldots; 2\}$
- Achtung: $X = \{2, 4, \ldots, 16\}$ könnte einerseits als die Menge der geraden Zahlen von 2 bis 16 – also $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ – und andererseits als die Menge der Zweierpotenzen von 2 bis 16 – also $\{2, 4, 8, 16\}$ – interpretiert werden.

Die beiden Schreibweisen haben jeweils einen Vorteil: Die aufzählende Schreibweise ist exakt (eindeutig) und die elliptische Schreibweise ist kurz. Diese beiden Vorteile werden mit der *beschreibenden Schreibweise* vereint, die wie folgt aufgebaut ist:

$$M = \{\text{Objekte } m \underbrace{\quad | \quad}_{\text{„für die gilt“}} m \text{ erfüllt eine logische Aussage}\}\,.$$

Beispiele:

- $J = \{j \mid j \text{ ist eine Jahreszeit}\}$
- $S = \{s \in \mathbb{N} \mid 2 \leq s \leq 12\}$ (gelesen: „S ist die Menge aller natürlichen Zahlen[3] s für die gilt: 2 kleiner gleich s kleiner gleich 12.“)
- $Z = \{n \cdot \frac{1}{4} \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq n \leq 8\}$

Zum Ende dieses Abschnitts sei darauf hingewiesen, dass mit jeder der eingeführten Mengenschreibweisen *nur* ausgedrückt wird, ob ein Element in der Menge *enthalten* ist. Daher gelten die beiden folgenden Sätze:

Satz 2.3

Die Reihenfolge der Elemente einer Menge ist bedeutungslos.

[3] Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sowie weitere wichtige Zahlenmengen werden später im Abschnitt 2.2 aufgeführt.

Satz 2.4
Die mehrfache Nennung von Elementen bewirkt keine Veränderung.

Beispiele:

- $\{1,2,3,4\} = \{1,4,3,2\}$
- $\{1,2,3\} = \{1,1,2,2,2,3\}$

2.1.1 Venn-Diagramme

Eine Möglichkeit zur Visualisierung von Mengen bieten *Venn-Diagramme*. Diese werden von einem Rechteck umgeben, welches das Ganze bzw. die Grundmenge symbolisiert, die häufig als Ω bezeichnet wird. Die betrachteten Mengen werden als Ellipsen dargestellt und mit ihrem Namen beschriftet. Die Elemente der Mengen können in diese Ellipsen notiert werden. Falls es Elemente gibt, die in beiden Mengen existieren, werden diese in die Schnittfläche der Ellipsen geschrieben. Für die beiden Mengen $A = \{2,3\}$, $B = \{3,5\}$ und $\Omega = \{2,3,4,5\}$ wird das Venn-Diagramm in Abb. 1 gezeigt.

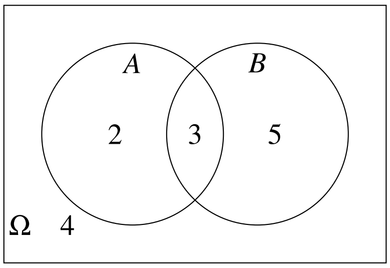


Abbildung 1: Venn-Diagramm mit zwei Mengen

Im den folgenden Unterkapiteln werden wir diese Visualisierungsmöglichkeit zur Unterstützung nutzen.

2.1.2 Mächtigkeit

Damit wir einfach angebenen können, wie viele Elemente in einer Menge enthalten sind, definieren wir noch die Mächtigkeit:

Definition 2.5 (Mächtigkeit)
Sei M eine endliche Menge. Die **Anzahl der Elemente** (oder auch **Mächtigkeit** oder **Betrag**) dieser Menge ist definiert als:

$$\#(M) := |M| := \text{Anzahl der Elemente von } M$$

Beispiele: Man beachte insbesondere den Satz 2.4!

- $4 = |\{1,3,5,7\}| = |\{1,1,3,5,5,5,7,7\}|$
- $0 = |\emptyset|$

2.2 Wichtige Mengen von Zahlen

- Die *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
  Man beachte, dass wir in der Informatik die 0 als natürliche Zahl ansehen. Um dies eindeutig zu machen kann man auch $\mathbb{N}_0$ schreiben. In der Mathematik wird sie hingegen ausgeschlossen. Um dies eindeutig zu machen kann man auch $\mathbb{N} \setminus \{0\}$[4] oder $\mathbb{N}_+$ schreiben.
- Die *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Die *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$
- Die *reellen Zahlen* $\mathbb{R} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{n} a_k \cdot 10^k \mid n \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, 1, \dots, 9\} \right\}$
- Die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i} \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
  Die komplexen Zahlen werden wir in der Informatik zunächst nicht benötigen.

2.3 Prädikatenlogik

In diesem Unterkapitel werden wir Quantoren betrachten, für die sowohl die Aussagenlogik als auch die Mengenlehre benötigt werden. Quantoren ermöglichen es, Aussagen für alle Elemente oder für mindestens ein Element einer Menge zu treffen.

2.3.1 Allquantor

Um auszudrücken, dass eine Eigenschaft E für alle Elemente einer Menge gilt wird der *Allquantor* $\forall$ genutzt:

$$\forall x \in M : E(x) \quad \text{(„Für alle Elemente } x \text{ in } M \text{ gilt Eigenschaft } E\text{.“)}$$

Beispiele:

- Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.
  $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 \in \mathbb{N}$
- Jede natürliche Zahl ist eine ganze Zahl (d. h. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$).
  $\forall n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{Z}$

Bemerkung: Man beachte, dass bei Quantoren zur Trennung stets ein Doppelpunkt : genutzt wird, während bei der beschreibenden Mengenschreibweise ein vertikaler Strich | geschrieben wird.

2.3.2 Existenzquantor

Um auszudrücken, dass eine Eigenschaft für mindestens ein Element einer Menge zutrifft wird der *Existenzquantor* $\exists$ genutzt:

$$\exists x \in M : E(x) \quad \text{(„Es existiert ein Element } x \text{ in } M\text{, für das die Eigenschaft } E \text{ gilt.“)}$$

[4] Dabei ist \ der Differenzoperator für Mengen. Er wird in Abschnitt 2.5.1 eingeführt.

Beispiele:

- Es gibt eine natürliche Zahl, die kleiner ist als 5.
  $\exists n \in \mathbb{N} : n < 5$
- Es gibt reelle Zahlen, die irrational sind.
  $\exists x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}$.

2.3.3 Negation

Möchte man die beiden Quantoren negieren, kann man sich Folgendes für den Allquantor überlegen. Wenn eine bestimmte Eigenschaft nicht für alle Elemente gilt, so gibt es mindestens eine Ausnahme – ein Element, für das dieselbe Eigenschaft nicht gilt. Und für das Negieren des Existensquantors: Wenn es kein Element gibt, welches eine bestimmte Eigenschaft erfüllt, dann heißt dies, dass die Eigenschaft für alle Elemente nicht erfüllt wird.

Formal kann man also schreiben:

$$\neg(\forall x : \text{x hat Eigenschaft } E) \Leftrightarrow \exists x : \text{x hat nicht Eigenschaft } E$$
$$\neg(\exists x : \text{x hat Eigenschaft } E) \Leftrightarrow \forall x : \text{x hat nicht Eigenschaft } E$$

2.3.4 Verwendung von mehreren Quantoren

Es besteht auch die Möglichkeit, mehrere Quantoren in einer Aussage zu verbinden. Hierbei ist die Reihenfolge der Quantoren von entscheidender Bedeutung, wie an den folgenden Beispielen zu sehen ist.

Beispiele:

- Für alle natürlichen Zahlen existiert eine natürliche Zahl, die größer ist. (*wahr*)
  $\forall n \in N \; \exists m \in \mathbb{N} : n < m$
- Es existiert eine natürliche Zahl, für die alle natürlichen Zahlen größer sind. (*falsch*)
  $\exists n \in N \; \forall m \in \mathbb{N} : n < m$
- Alle rationalen Zahlen lassen sich als Bruch aus einer ganzen und einer natürlichen Zahl ohne Null darstellen. (*wahr*)
  $\forall q \in \mathbb{Q} \; \exists z \in \mathbb{Z} \; \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : q = \frac{z}{n}$

2.4 Relationen zwischen Mengen

In diesem Abschnitt werden wir auf die beiden Relationen *Teilmenge* und *Gleichheit* und deren Schreibweise eingehen. Eine Relation beschreibt einen Zusammenhang zwischen zwei Mengen.

Definition 2.6 (Teilmenge)

Seien M, N zwei Mengen, dann ist M genau dann eine **Teilmenge** von N, wenn jedes Element der Menge M auch ein Element der Menge N ist:

$$M \subseteq N :\Leftrightarrow \forall m \in M : m \in N$$

Beispiel: Betrachten wir die beiden Mengen $M := \{2,4,6\}$ und $N := \{1,2,3,4,5,6,7\}$, gilt $M \subseteq N$, da alle Elemente von M – also $2,4$ und 6 – auch in N enthalten sind.

Mengen können auch widerum Mengen als Elemente enthalten. Hier ist es besonders wichtig, zwischen Teilmengen und Elementen zu unterscheiden!

Beispiele:

- Für die Menge $M := \{1,2,3\}$ gilt $2 \in M$ und $\{2\} \subseteq M$ aber nicht $\{2\} \in M$.
- Eine Menge, für die $\{2\} \in M$ richtig ist, wäre zum Beispiel $M := \{1,\{2\},3\}$.
  Hier gilt aber nun nicht mehr $2 \in M$.
- Es geht auch alles zusammen, etwa mit der Menge $M := \{1,2,\{2\},3\}$. Hier gelten sowohl $\{2\} \subseteq M$ als auch $\{2\} \in M$ und $2 \in M$.

Bemerkung:

- Oft wird das Teilmengenzeichen auch andersherum verwendet, etwa $M \supseteq N$. Dies heißt dann natürlich, dass N eine Teilmenge von M ist. Es ist ebenfalls üblich zu sagen, dass M eine *Obermenge* von N ist.
- So wie das $<$ zum $\leq$ Zeichen definiert ist, ist analog das Zeichen $\subset$ (echte Teilmenge) definiert. Leider wird dies oft dennoch synonym zum $\subseteq$ verwendet, so dass man eine explizite Ungleichheit besser durch das Zeichen $\subsetneq$ ausdrückt.

Aus der Definition 2.6 folgt das Lemma über die leere Menge.

Lemma 2.7 (Leere Menge als Teilmenge)

Die leere Menge ist Teilmenge einer jeden Menge. Für jede Menge M gilt also $\emptyset \subseteq M$.

Da $\emptyset$ keine Elemente enthält, ist die in der Definition geforderte Eigenschaft (für alle Elemente) trivial erfüllt.

Für die Teilmengenrelation gilt außerdem die *Transitivität*.

Lemma 2.8 (Transitivität für Teilmengen)

Seien A,B,C Mengen und gelte $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$.
Dann gilt $A \subseteq C$.

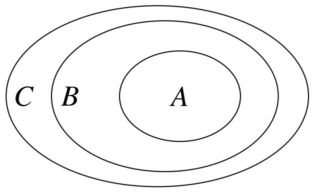


Abbildung 2: Visualisierung (mit einem Euler-Diagramm) zur Transitivität von Mengen

Dies lässt sich gut nachvollziehen, wenn man sich ein Venndiagramm mit den Mengen A,B,C vorstellt (s. Abb. 2). Dabei ist nach dem ersten Teil der Aussage ($A \subseteq B$) die Menge A innerhalb (oder gleich) der Menge B. Außerdem ist B innerhalb von (oder gleich) C. Das bedeutet, dass A auch innerhalb von (oder gleich) C sein muss.

Auf Grundlage der vorherigen Definition kann die Gleichheit von Mengen folgendermaßen definiert werden:

Definition 2.9 (Gleichheit von Mengen)

Seien M,N zwei Mengen. Wir nennen die Mengen M und N **gleich**, wenn für alle Elemente gilt, dass sie genau dann in M enthalten sind, wenn sie auch in N enthalten sind:

$$M = N :\Leftrightarrow \forall x : x \in M \Leftrightarrow x \in N$$

Die Gleichheit von Mengen kann auch unter Benutzung der Teilmengenrelation definiert werden: Wir nennen die Mengen M und N gleich, wenn sowohl M eine Teilmenge von N als auch N Teilmenge von M ist.

$$M = N :\Leftrightarrow M \subseteq N \text{ und } N \subseteq M$$

2.4.1 Potenzmenge

Nun betrachten wir noch ein sehr prominentes Beispiel einer Menge, welche (ausschließlich) Mengen enthält:

Definition 2.10 (Potenzmenge)

Sei M eine Menge. Die **Potenzmenge** der Menge M ist diejenige Menge $\mathcal{P}(M)$, deren Elemente genau sämtliche Teilmengen der Menge M sind.
Schreibe: $\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$

Beispiel: Für die Mengen $M_2 := \{1,2\}$ und $M_3 := \{1,2,3\}$ sind die Potenzmengen

$$\mathcal{P}(M_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, M_2\},$$

$$\mathcal{P}(M_3) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, M_3\} .$$

2.5 Mengenoperationen

Nun wollen wir mit Mengen „rechnen“, also uns mit Operationen auf Mengen beschäftigen. Die drei wichtigsten sind der *Schnitt*, die *Vereinigung* und die *Differenz*.

2.5.1 Differenz

Definition 2.11 (Differenz)
Seien M,N Mengen. Die **Differenz** $M \setminus N$ („M ohne N“) , ist diejenige Teilmenge von M, welche genau die Elemente von M enthält, die nicht in der Menge N sind.
Schreibe: $M \setminus N := \{m \mid m \in M \wedge m \notin N\}$

Bemerkung: Die Menge N muss nicht zwingend eine Teilmenge von M sein.

Die Differenz wird im folgenden Venn-Diagramm visualisiert. Dabei wird beschriebene Bereich grau hinterlegt.

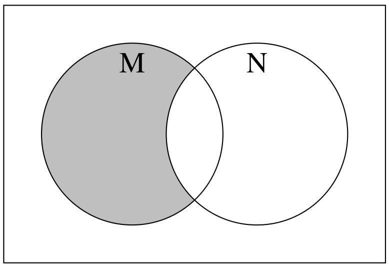


Abbildung 3: Venn-Diagramm zu $M \setminus N$.

Beispiele:

- $\{1,2,3,4,5\} \setminus \{2,3\} = \{1,4,5\}$
- $\mathbb{N} \setminus \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\}$
- $\{1,2,3,4\} \setminus \{3,4,5\} = \{1,2\}$.

2.5.2 Vereinigung

Definition 2.12 (Vereinigung)
Seien M,N Mengen. Die **Vereinigung** $M \cup N$ („M vereinigt (mit) N“) enthält genau die Elemente, die in mindestens einer der Mengen M und N vorkommen.
Schreibe: $M \cup N := \{m \mid m \in M \vee m \in N\}$

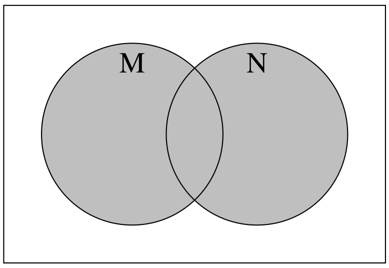


Abbildung 4: Venn-Diagramm zu $M \cup N$.

Beispiele:

- $\{1,2,3,4,5\} \cup \{3,4,5,6,7\} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
- $\{1,2,3,4\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3,4\}$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\} = \mathbb{N}$.

2.5.3 Schnitt

Definition 2.13 (Schnitt)

Seien M,N Mengen. Der **Schnitt** $M \cap N$ („M geschnitten (mit) N") ist diejenige Menge, welche aus genau den Elementen besteht, welche sowohl in M als auch in N enthalten sind.
Schreibe: $M \cap N := \{m \mid m \in M \wedge m \in N\}$

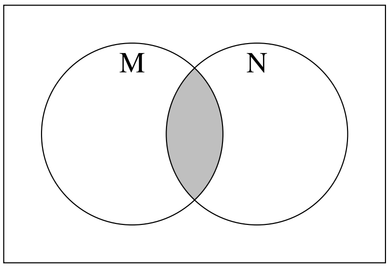


Abbildung 5: Venn-Diagramm zu $M \cap N$.

Beispiele:

- $\{1,2,3,4,5\} \cap \{3,4,5,6,7\} = \{3,4,5\}$
- $\{1,2,3,4\} \cap \{2,3\} = \{2,3\}$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\} = \emptyset$.

2.5.4 Komplement

Definition 2.14 (Komplement)

Sei M eine Teilmenge einer Menge Ω. Das **Komplement** $M^c = \overline{M}$ der Menge M (bezüglich der Menge Ω) besteht aus allen übrigen, nicht in M enthaltenen Elementen von Ω.
Schreibe: $M^c := \overline{M} := \Omega \setminus M$.

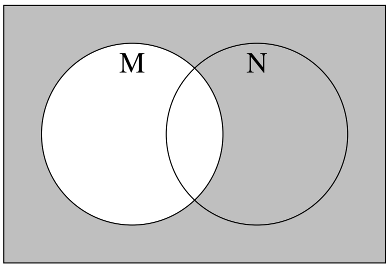


Abbildung 6: Venn-Diagramm zu $M^c = \overline{M}$.

Das Komplement ist demnach eine Mengendifferenz, bei der nicht extra angegeben werden muss, von welcher Menge Elemente entfernt werden, da es sich dabei stets um die (jeweils bekannte) Grundmenge ω handelt.

2.5.5 Eigenschaften

Da sich die Mengenverknüpfungen auch als aussagenlogische Verknüpfungen schreiben lassen, was bereits bei den Definitionen genutzt wurde, ergeben sich für die Mengenoperatoren analoge Regeln:

Lemma 2.15 (Eigenschaften)

Seien A, B, C Mengen. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\text{Kommutativgesetze:} \quad & A \cap B = B \cap A \\
& A \cup B = B \cup A \\
\text{Assoziativgesetze:} \quad & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\
& (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\
\text{Distributivgesetze:} \quad & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \\
& (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\
\text{Regeln von de Morgan:} \quad & \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\
& \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\
\text{Absorbtionsregeln:} \quad & A \cap (A \cup B) = A \\
& A \cup (A \cap B) = A \\
\text{Kontraposition:} \quad & (A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})
\end{aligned}
$$

Um bspw. die 1. Regel von de Morgan zu beweisen, kann wie folgt vorgegangen werden:

$$
\begin{aligned}
& x \in \overline{A \cap B} \\
\Leftrightarrow\ & x \notin A \cap B \\
\Leftrightarrow\ & \overline{x \in A \wedge x \in B} && \text{| de Morgan der Aussagenlogik} \\
\Leftrightarrow\ & x \notin A \vee x \notin B \\
\Leftrightarrow\ & x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \\
\Leftrightarrow\ & x \in \overline{A} \cup \overline{B}
\end{aligned}
$$

Autoren dieses Kapitels:

2016: Lars Elend

2014-2015: Tabea Henning, Hannes de Witt, Malte Behr

2013: Malte Behr

2012: Stefan Hellbusch

3 Arithmetik

In diesem Kapitel werden wir auf die grundlegende Rechenregeln und -gesetze eingehen. Außerdem werden wir verkürzende Schreibweisen für Summen und Produkte sowie die Fakultät einführen. Danach befassen wir uns mit Wurzeln, Potenzen und Logarithmen und schließlich definieren wir noch den Betrag.

3.1 Grundlegende Regeln

Satz 3.1 (Grundrechenregeln für Addition und Multiplikation)

Für die Addition und Multiplikation von $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln:

Kommutativgesetze:	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetze:	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Neutrale Elemente:	$a+0=a$	$a \cdot 1 = a$
Inverse Elemente:	$a+(-a)=0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$
Distributivgesetz:	$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	

Bemerkung:

- Verwendet man das Distributivgesetz von links nach rechts, spricht man vom *Ausmultiplizieren*. Andersherum heißt es *Ausklammern*.
- Statt $\frac{1}{a}$ schreibt man häufig auch a^{-1}.

Des Weiteren können reelle Zahlen bezüglich ihrer Größe miteinander verglichen werden. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt stets genau eine der folgenden Beziehungen:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

Für diese Ordnung gelten einige Regeln:

Satz 3.2 (Regeln über Vergleiche)

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln:

Transitivität:	$a < b \wedge b < c \Longrightarrow a < c$
Monotonie bzgl. Addition:	$a < b \Longleftrightarrow a+c < b+c$
Monotonie bzgl. Multiplikation:	$a < b \wedge c > 0 \Longrightarrow ac < bc$
	$a < b \wedge c < 0 \Longrightarrow ac > bc$
weitere Eigenschaften:	$a \cdot b > 0 \Longleftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
	$a \cdot b < 0 \Longleftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$
	$a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

3.2 Bruchrechnung

Obwohl die Bruchrechnung aus der Schule schon lange bekannt sein sollte, werden dennoch immer wieder Fehler bei ihr gemacht. Daher führen wir auch dazu noch einige Regeln auf, die sich alle aus den bisherigen Regeln aus Satz 3.1 herleiten lassen. Doch zunächst die Definition:

Definition 3.3 (Bruch)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann schreiben wir, um a durch b zu teilen

$$\frac{a}{b}$$

Dabei ist a der **Zähler** und b der **Nenner**.
Das Inverse eines Bruches wird als **Kehrwert** bezeichnet:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

Bemerkung: Die Schreibweise $a : b$ wird in der Regel nicht verwendet, da sie weniger übersichtlich ist.

Lemma 3.4 (Grundrechenregeln für Brüche)
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ b \neq 0,\ d \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Erweitern bzw. Kürzen:} &\quad \frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \\ \text{Addition:} &\quad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \\ \text{Multiplikation:} &\quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \\ \text{Division:} &\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{d}{c}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \end{aligned}$$

Beispiele:

- $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2x}{3x}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{13}{12} = 1 + \frac{1}{12} \neq 1\frac{1}{12} = 1 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$
- $\frac{3}{4} : \frac{9}{16} = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{9} = \frac{3 \cdot 16}{4 \cdot 9} = \frac{\cancel{3} \cdot 4 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 3} = \frac{4}{3}$

3.3 Verkürzende Schreibweisen

Damit lange Summen und Produkte, die nach einem bestimmten Muster aufgebaut sind, kurz notiert werden können, werden hierfür abkürzende Schreibweisen eingeführt. Danach wird noch auf zwei Umformungen – die Indextransformation und das Herausziehen des letzten Summanden einer Summe oder Faktors eines Produkts – eingegangen. Schließlich wird noch die Fakultät definiert.

3.3.1 Summen- und Produktzeichen

Da Summen- und Produktzeichen analog zueinander funktionieren, werden wir sie gemeinsam definieren und auch in den folgenden Beispielen parallel betrachten.

Definition 3.5 (Summen- und Produktzeichen)

Seien $k,\ n \in \mathbb{N}$. Mit dem Summenzeichen $\sum$ (gr. Sigma) lassen sich Summen und mit dem Produktzeichen $\prod$ (gr. Pi) lassen sich Produkte wie folgt notieren:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i := a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n \qquad \prod_{i=k}^{n} a_i := a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_n$$

Hierbei ist i die Laufvariable, k die untere Grenze, n die obere Grenze und a_i ein Term in Abhängigkeit von i. Die Variable i nimmt alle natürlichen Werte von k bis n an.
(„Summe / Produkt von $i = k$ bis n über a_i.“)
Falls $k > n$ gilt, ist der Wert das neutrale Element, also 0 bei der Summe und 1 beim Produkt.

Alternativ kann die Laufvariable auch über eine Menge definiert werden:

$$\sum_{i \in \{k,\ldots,n\}} a_i := a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n \qquad \prod_{i \in \{k,\ldots,n\}} a_i := a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n$$

Beispiele:

$$\sum_{i=3}^{7} i = 3+4+5+6+7 \qquad \prod_{i=3}^{7} i = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$$

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \qquad \prod_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2$$

$$\sum_{i=0}^{3} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1+2+4+8 \qquad \prod_{i=0}^{3} 2^i = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8$$

3.3.2 Indextransformation

Bei der Indextransformation wird der Wertebereich der Laufvariablen i verändert (die untere und die obere Grenze gleichermaßen). Dabei werden außerdem die Terme a_i so angepasst, dass der Gesamtausdruck gleich bleibt. Verschiebt man also die untere und die obere Grenze um x nach oben, muss zugleich im Term x_i jedes Auftreten der Variablen i durch $(i - x)$ ersetzt werden:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n = \sum_{i=k+x}^{n+x} a_{i-x}$$

Die Indextransformation funktioniert für Summen- und Produktzeichen analog:

Beispiele:

$$\sum_{i=3}^{7} i = \sum_{i=4}^{8}(i-1) \qquad \prod_{i=3}^{7} i = \prod_{i=4}^{8}(i-1)$$
$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = \sum_{i=0}^{3}(i+1)^2 \qquad \prod_{i=1}^{4} i^2 = \prod_{i=0}^{3}(i+1)^2$$
$$\sum_{i=0}^{3} 2^i = \sum_{i=2}^{5} 2^{(i-2)} \qquad \prod_{i=0}^{3} 2^i = \prod_{i=2}^{5} 2^{(i-2)}$$

3.3.3 Elemente aus Summen und Produkten ziehen

Nun zeigen wir noch wie einzelne Summanden aus Summen bzw. Faktoren aus Produkten gezogen werden können. Um sich dies zu veranschaulichen, ist es sinnvoll, noch einmal die elliptische Schreibweise als Zwischenschritt zu nutzen. Betrachtet man diese, wird klar, dass jeder beliebige Abschnitt von Elementen mit einer verkürzenden Schreibweise zusammengefasst werden könnte (sogar mehrere). Als erstes Beispiel zeigen wir, wie das letzte Element einer Summe oder eines Produktes herausgezogen werden kann, da dies später bei der *Vollständigen Induktion* (s. Kapitel 5) von großer Bedeutung sein wird.

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n = \left(\sum_{i=k}^{n-1} a_i\right) + a_n$$
$$\prod_{i=k}^{n} a_i = a_k \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = \left(\prod_{i=k}^{n-1} a_i\right) \cdot a_n$$

Genauso ist es möglich ein Element vom Anfang oder aus der Mitte herauszuziehen:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + \sum_{i=k+1}^{n} a_i \qquad \prod_{i=k}^{n} a_i = a_k \cdot \prod_{i=k+1}^{n} a_i$$
$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \left(\sum_{i=k}^{j-1} a_i\right) + a_j + \sum_{i=j+1}^{n} a_i \qquad \prod_{i=k}^{n} a_i = \left(\prod_{i=k}^{j-1} a_i\right) \cdot a_j \cdot \prod_{i=j+1}^{n} a_i \qquad \text{wobei } k < j < n$$

Beispiele:

$$\sum_{i=3}^{7} i = \left(\sum_{i=3}^{6} i\right) + 7 \qquad \prod_{i=3}^{7} i = \left(\prod_{i=3}^{6} i\right) \cdot 7$$
$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + \sum_{i=2}^{4}(i+1)^2 \qquad \prod_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 \cdot \prod_{i=2}^{4}(i+1)^2 = \prod_{i=2}^{4}(i+1)^2$$
$$\sum_{i=0}^{3} 2^i = \left(\sum_{i=0}^{2} 2^i\right) + 2^3 \qquad \prod_{i=0}^{3} 2^i = \left(\prod_{i=0}^{2} 2^i\right) \cdot 2^3$$

3.3.4 Fakultät

Eine weitere verkürzende Schreibweise, die insbesondere in der Stochastik benötigt wird, ist die Fakultät, die durch ein nachgestelltes Ausrufezeichen ! symbolisiert wird. Für die Definition können wir auch die Produktschreibweise nutzen.

Definition 3.6 (Fakultät)

Die Fakultät ! beschreibt das Produkt der Faktoren 1 bis zu der angegebenen natürlichen Zahl n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Beachte, dass damit $0! = 1$ gilt.

3.4 Wurzeln, Potenzen und Logarithmen

Definition 3.7 (Potenz)

Sei $b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ b \neq 0 \vee n \neq 0$. Dann definieren wir:

$$b^n := \prod_{i=1}^{n} b \qquad \text{und} \qquad b^{-n} := \frac{1}{b^n} \quad \text{für } b \neq 0$$

Für die **Potenz** b^n ist b die **Basis** und n der **Exponent**.
(„b hoch n“)

Wenn die Potenz und die Basis bekannt sind und man den Exponenten herausfinden möchte, zieht man die *Wurzel*:

Definition 3.8 (Wurzel)

Sei $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann definieren wir die (positive) n-te Wurzel aus a als die einzige *nichtnegative* Lösung x der Gleichung

$$x^n = a$$

und schreiben

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = x.$$

Hierbei wird a als **Radikant** und n als **Wurzelexponent** bezeichnet.
Wird kein Wurzelexponent angegeben wird, handelt es sich um eine **Quadratwurzel** (mit $n = 2$).

Beispiele:

- $2^3 = \prod_{i=1}^{3} 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
- $\sqrt[3]{8} = 2$
- $(\sqrt[n]{a})^n = a \quad$ für $a \geq 0,\ n \geq 1$

- $\sqrt{49} = 7$

Die folgenden Potenzgesetze ergeben sich aus der Definition und der Anwendung bereits bekannten Rechenregeln.

Lemma 3.9 (Potenzgesetze)

Seien $a, b, r, s \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$.

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$
$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$
$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$
$$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$$
$$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

Durch die Definition der Wurzel lassen sich diese Regeln auch alle analog für die Wurzeln aufschreiben, da $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Da die Wurzelschreibweise aber seltener genutzt wird und die Herleitung einfach ist, wird auf die Nennung verzichtet.

Lediglich auf eine Regel sei hier noch einmal eingegangen:

$$\sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[r]{b} = a^{\frac{1}{r}} \cdot b^{\frac{1}{r}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{a \cdot b}$$

Diese Regel kann für das *partielle Wurzelziehen* genutzt werden kann:

Beispiel: $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot \sqrt{5}$

Damit auch der Exponent einer Potenz-Gleichung bestimmt werden kann, führen wir noch den Logarithmus ein.

Definition 3.10 (Logarithmus)

Sei $b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ und $y \in \mathbb{R}_+$. Dann definieren wir:

$$x = \log_b(y) :\Leftrightarrow b^x = y$$

(„Logarithmus von y zur Basis b.“)

Beispiele:

- $\log_2(8) = 3$
- $\log_{1,05}(2) \approx 14,2$ (Wie viele Jahre dauert es, bis sich bei 5% Zinsen angelegtes Geld verdoppelt? – 14,2 Jahre.)

Bemerkung: Für häufig genutzte Basen gibt es die folgenden Abkürzungen:

$$\lg(x) := \log_{10}(x)$$
$$\ln(x) := \log_{e}(x) \qquad \text{(Der \textit{Logarithmus naturalis} hat die eulersche Zahl } e \text{ zur Basis.)}$$
$$\mathrm{lb}(x) := \log_{2}(x)$$

3.5 Betrag

Definition 3.11 (Betrag)

Für $x \in \mathbb{R}$ wird der **Betrag** $|x|$ („Betrag von x“) wie folgt definiert:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Beispiele:

$$|42| = |-42| = 42$$

$$\begin{aligned} & |x+1| = 3 \\ \Leftrightarrow\ & x+1 = 3 \quad \vee \quad x+1 = -3 \\ \Leftrightarrow\ & x = 3-1 \quad \vee \quad x = -3-1 \\ \Leftrightarrow\ & x = 2 \quad \vee \quad x = -4 \end{aligned}$$

Autoren dieses Kapitels:

2016: Lars Elend

4 Beweismethoden

Das wahrscheinlich wichtigste Konstrukt der Mathematik ist der Beweis. Hier hebt sich die Mathematik von den Naturwissenschaften ab. In diesen werden auf der Basis von wiederholten Beobachtungen Hypothesen (Vermutungen) formuliert. Diese können nun durch weitere Beobachtungen gestützt werden oder müssen aufgrund von widersprüchlichen Erkenntnissen geändert oder gänzlich verworfen werden. Auf diese Weise kann man sich nie ganz sicher sein, dass eine gerade als gültig anerkannte Hypothese tatsächlich der Wahrheit entspricht.

Ein Mathematiker erklärt dagegen Aussagen nur dann für gültig, wenn sie streng den Regeln der Logik folgend aus bereits als wahr erkannten Aussagen geschlussfolgert werden können. Eine derartige Begründung, warum etwas gültig ist, nennen wir einen *Beweis*. Eine Aussage, die einmal bewiesen wurde, ist ohne Zweifel für alle Ewigkeit wahr, denn die Existenz eines Beweises sichert sie gegen das Auftauchen widersprüchlicher Entdeckungen ab.

Eine mathematische Vermutung wird durch einen Beweis zu einem *Satz* (auch Theorem, Lemma, Korollar). Ein Satz wiederum kann in die Beweise weiterer Vermutungen eingebaut werden, sodass neue darauf aufbauende Sätze entstehen. Als Grundlage aller dieser Überlegungen dienen den Mathematikern einige *Axiome*, auf die sich die Mathematik im Laufe der Zeit beschränkt hat. Axiome bilden das allererste Glied in der Kette aufeinander folgender Sätze. Sie sind Aussagen, die nicht bewiesen werden können, aber als wahr anerkannt werden. Axiome sind das Fundament aller mathematischen Aussagen.

Im Folgenden werden wir uns mit dem Aufbau mathematischer Sätze und Beweise beschäftigen.

4.1 Sätze und Definitionen

Ein Satz ist die Niederschrift einer beweisbar wahren mathematischen Erkenntnis. Ein fundamentaler Satz in der Arithmetik ist zum Beispiel der folgende:

Satz 4.1 (Primteiler)

Jede natürliche Zahl größer als 1 hat einen Primteiler.

Um mit diesem Satz arbeiten zu können, müssen wir herausfinden, wie er zusammengesetzt ist, für welche Objekte er angewendet werden kann und was er uns über sie mitteilt. Dazu müssen alle Begriff geklärt werden, die in diesem Satz vorkommen. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ kennen wir bereits aus Kapitel 2 zur Mengenlehre. Also bleibt nur noch zu klären, was ein Primteiler ist. Dieser Begriff setzt sich aus den beiden Teilen Primzahl und Teiler zusammen.

Definition 4.2

Seien $a, n \in \mathbb{Z}$ und $n > 1$. Die Zahl n heißt ein **Teiler** von a, falls es eine ganze Zahl q gibt mit $a = qn$.

Die dafür übliche Schreibweise lautet $n|a$, gesprochen „n teilt a".

Definition 4.3

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n > 1$. Die Zahl n heißt eine **Primzahl**, falls 1 und n die einzigen natürlichen Zahlen sind, die n teilen. Ansonsten heißt n eine **zusammengesetzte Zahl**.

Definition 4.4

Seien $a, n \in \mathbb{Z}$ und $n > 1$. Die Zahl n heißt ein **Primteiler** von a, falls n ein Teiler von a und eine Primzahl ist.

Beispiele:

- Betrachte die Zahl 20. Mit ein wenig Kopfrechnen stellen wir fest, dass $20 = 4 \cdot 5$ ist. Die Zahl 5 ist eine Primzahl – sie ist nur durch 1 und sich selbst teilbar. Also ist 5 ein Primteiler von 20. Dies passt zu unserem Satz: 20 ist eine natürliche Zahl größer als 1 und wir haben verifiziert, dass sie einen Primteiler hat.

- Als zweites betrachten wir die Zahl 674219. Anders als eben ist es bei dieser Zahl nicht so einfach, im Kopf einen Primteiler zu finden. Doch 674219 ist ebenfalls eine natürliche Zahl und offensichtlich größer als 1, daher versichert uns Satz 4.1, dass eine Primzahl existiert, die 674219 teilt, ohne dass wir überhaupt rechnen müssten.

- Zuletzt wollen wir die Zahl $\frac{25}{2}$ betrachten. Diese ist keine natürliche Zahl. Unser Satz ist daher nicht anwendbar und gibt uns keine Information über diese Zahl.

Wir wollen festhalten, was wir im Beispiel unternommen haben. Mehrmals haben wir eine Zahl gewählt $(20, 674219, \frac{25}{2})$ und haben uns gefragt, ob diese Zahl eine natürliche Zahl und größer als 1 ist. Wir sagen dazu, dass wir die *Voraussetzungen* des Satzes überprüft haben. Für die ersten beiden Zahlen waren die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, für die letzte nicht. Die Voraussetzung teilt uns mit, für welche Objekte der Satz überhaupt eine Aussage trifft.

Für jedes Objekt, das alle Voraussetzungen eines Satzes nachweislich erfüllt, kann der Satz angewendet werden, um neue Erkenntnisse über dieses Objekt zu gewinnen. In unserem Beispiel haben so wir herausgefunden, dass die beiden Zahlen 20 und 674219 einen Primteiler besitzen. Die Aussage eines Satzes nennen wir auch seine *Behauptung*. Diese Bezeichnung erinnert uns daran, dass ein mathematischer Satz nichts wert ist, solange wir keinen Beweis für seine Behauptung haben.[5]

Bei genauem Hinsehen besteht (fast) jeder mathematische Satz also aus drei Teilen:

1. der *Voraussetzung* („Wenn ...“)

2. der *Behauptung* („Dann ...“)

3. dem *Beweis*

Diesen formalen Aufbau zu kennen und ihn in den Sätzen, mit denen wir zu tun haben, immer wieder aufs Neue zu erkennen, ist grundlegend für das Verständnis mathematischer Sätze. Voraussetzung und Behauptung zu trennen, ist oft unerwartet schwer, weil Sätze nicht immer als „Wenn-Dann“-Aussagen formuliert sind – wie auch in unserem Beispielsatz. Den Satz in seine Einzelteile zu zerlegen und formal zu gliedern, ist dann schon ein wichtiger, großer Schritt. Wir halten uns also immer an die Struktur

[5] Satz 4.1 werden wir in Abschitt 4.4 beweisen.

Voraussetzung – Behauptung – Beweis

wenn wir uns mit einem Satz beschäftigen. Denn erst wenn wir herausgefunden haben, welche Voraussetzungen ein Satz hat und welche Behauptung er trifft, können wir überhaupt anfangen, uns Gedanken über den Beweis des Satzes zu machen. Die ersten Schritte in Richtung eines mathematischen Beweises sind also immer die folgenden Fragen:

1. Was genau wird vorausgesetzt?
2. Was genau wird behauptet?

Wir können dieses Konzept eines mathematischen Satzes mithilfe der Symbole der Aussagenlogik, wie sie in Kapitel 1 vorgestellt wurden, darstellen. Ein aus Voraussetzung und Behauptung aufgebauter Satz ist in der Sprache der Logik eine Aussage der Form

$$A \Rightarrow B,$$

gesprochen „A impliziert B“ oder „Aus A folgt B“. Dabei ist die Aussage A die Voraussetzung und die Aussage B die Behauptung des Satzes. Die logische Begründung für die Implikation ($\Rightarrow$) wäre der Beweis dieses Satzes.

Wir haben bereits im Beispiel gemerkt, dass unser Satz 4.1 die obige Form besitzt. Wir notieren ihn noch einmal leicht verändert, um diese Struktur deutlich zu machen.

Voraussetzung: Sei n eine natürliche Zahl größer als 1.
Behauptung: Dann hat n einen Teiler, der eine Primzahl ist.

Wir können auch noch einen Schritt weiter gehen und denselben Satz mithilfe von mathematischen Symbolen schreiben. Wir definieren dazu die Menge der Primzahlen als

$$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ ist eine Primzahl}\}.$$

Dann lautet die alternative Schreibweise

$$\underbrace{\forall n \in \mathbb{N},\ n > 1}_{\textit{Voraussetzung}}\ \underbrace{\exists p \in \mathbb{P} : p \mid n.}_{\textit{Behauptung}}$$

Wie beweist man nun Sätze? Ein Beweis ist ein fundamentaler Bestandteil jedes mathematischen Satzes! Wir erinnern uns, dass ein Beweis aus logischen Schlussfolgerungen aufgebaut wird. Wir können uns auf ein Axiom oder eine Definition berufen und Eigenschaften von darin beschriebenen Objekten (wie $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{P}$) verwenden. Ebenfalls kann sich auf einen bereits bewiesenen Satz bezogen werden, um mithilfe dieses genau wie mit Axiomen oder Definitionen eine Implikation zu begründen. Wollen wir beispielsweise einen Satz über Primzahlen beweisen, können wir dafür verwenden, dass jede Primzahl keine Teiler außer 1 und sich selbst besitzt (siehe Definition 4.3).

Um einen Satz zu beweisen, brauchen wir meistens eine ganze Reihe von Implikationen. Je nachdem, wie diese Reihe von logischen Folgerungen aufgebaut wird, ergibt sich eine andere Beweisstruktur. Es gibt im Wesentlichen vier Möglichkeiten, einen Beweis anzugehen:

1. den direkten Beweis,
2. den Beweis durch Kontraposition,
3. den Beweis durch Widerspruch,
4. den Beweis durch vollständige Induktion.

Der Rest dieses Kapitels beschäftigt sich mit den Beweisarten 1 bis 3. Der Beweis durch vollständige Induktion wird in Kapitel 5 gesondert behandelt.

4.2 Direkter Beweis

Ein *direkter Beweis* ist vom logischen Aufbau her die geradlinigste Art, einen Beweis zu führen. Hier gehen wir von der Voraussetzung A aus und landen nach einer oder mehreren logischen Schlussfolgerungen bei der Behauptung B.

Beispielhaft beschäftigen wir uns mit einem Satz über gerade und ungerade Zahlen. Formal können wir die Eigenschaften gerader und ungerader Zahlen wie in der folgenden Definition festlegen:

Definition 4.5

Sei z eine ganze Zahl.

a) z ist eine **gerade Zahl**, falls gilt $\exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k$.

b) z ist eine **ungerade Zahl**, falls gilt $\exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k + 1$.

Beispiele:

- Gerade Zahlen sind

$$0 = 2 \cdot 0, \qquad 2 = 2 \cdot 1, \qquad 8 = 2 \cdot 4, \qquad -26 = 2 \cdot (-13), \qquad 1034 = 2 \cdot 517$$

- Ungerade Zahlen sind

$$1 = 2 \cdot 0 + 1, \qquad 39 = 2 \cdot 19 + 1, \qquad (a-1)(a+1), \text{ falls } a \in \mathbb{Z} \text{ gerade ist}^{6}$$

Satz 4.6

Die Summe zweier ganzer Zahlen m und n ist genau dann gerade, wenn m und n beide gerade oder beide ungerade sind.

[6] Die Idee ist hier, dass bei geradem a sowohl $a-1$ als auch $a+1$ ungerade sind. In den Übungen wird gezeigt, dass dann auch das Produkt ungerade ist.

Dieser Satz ist eine Äquivalenzaussage (aussagenlogisch ausgedrückt: $A \Leftrightarrow B$). Solche Aussagen bestehen eigentlich aus zwei Teilen, $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$, die in der Regel auch getrennt bewiesen werden.[7] Zur Verdeutlichung formulieren wir die beiden Teile dieses Satzes noch einmal getrennt, wobei $m, n \in \mathbb{Z}$ gelte:

1. Wenn $m+n$ gerade ist, dann sind m und n beide gerade oder beide ungerade. (Hinrichtung)

2. Wenn m und n beide gerade oder beide ungerade sind, dann ist $m+n$ gerade. (Rückrichtung)

Um die Korrektheit des Satzes nachzuweisen, müssen also zwei Implikationen bewiesen werden. Wir fangen mit der zweiten an.

Beweis 1: (Satz 4.6, Implikation 2)
Seien die ganzen Zahlen m und n beide gerade oder beide ungerade. Dann betrachten wir nacheinander beide möglichen Fälle. Dieses Vorgehen wird in einer Situation wie hier häufig angewandt und als *Fallunterscheidung* bezeichnet.

Fall 1 Seien zuerst sowohl m als auch n gerade. Dann existieren ganze Zahlen r und s, sodass wir schreiben können

$$m = 2r,\ n = 2s.$$

Wir wollen die Summe $m+n$ berechnen. Dazu setzen wir obiges ein, klammern aus und erhalten

$$m+n = 2r+2s = 2(r+s).$$

Dabei ist $r+s$ eine ganze Zahl, nach der Definition 4.5 erkennen wir also, dass $m+n$ eine gerade Zahl ist.

Fall 2 Seien nun m und n beide ungerade. Dann gibt es ganze Zahlen r und s, sodass wir schreiben können

$$m = 2r+1, n = 2s+1.$$

So ähnlich wie eben errechnen wir

$$m+n = (2r+1)+(2s+1) = 2(r+s)+2 = 2(r+s+1)$$

Wir können erkennen, dass $r+s+1$ eine ganze Zahl und daher $m+n$ eine gerade Zahl ist.

An das Ende eines Beweises setzen wir das Zeichen $\square$ oder das Kürzel *qed*[8], die beide nichts anderes bedeuten als „Hier ist der Beweis zu Ende."

Die andere Richtung von Satz 4.6 (die Hinrichtung) werden wir uns im nächsten Abschnitt ansehen.

[7] Mathematiker sprechen hier von *Hinrichtung* und *Rückrichtung*.
[8] Die Abkürzung qed steht für „quod erat demonstrandum" – was zu zeigen war (lat.)

4.3 Kontraposition

Die Idee der Kontraposition ist, die folgende Äquivalenzaussage aus der Aussagenlogik zu verwenden:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Das bedeutet, dass die Implikation $A \Rightarrow B$ genau dann wahr ist, wenn die Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ gilt. Statt direkt „A impliziert B“ zu zeigen, können wir also auch $\neg B$ voraussetzen und $\neg A$ folgern, um dadurch die Implikation $A \Rightarrow B$ zu beweisen.

Wir zeigen nun die erste Implikation von Satz 4.6 und wenden dazu das Kontrapositionsprinzip an. Dementsprechend formulieren wir hier Satz 4.6 (Implikation 1) noch einmal neu, um zu sehen, was wir nun zeigen müssen.

„Wenn von den beiden ganzen Zahlen m und n eine gerade und eine ungerade ist, dann ist die Summe $m+n$ ungerade.“

Beweis 2: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit[a] (kurz o. B. d. A.) sei m gerade und n ungerade. Dann existieren zwei ganze Zahlen r und s, sodass gilt

$$m = 2r, \; n = 2s+1.$$

Noch einmal berechnen wir die Summe

$$m+n = 2r+(2s+1) = 2(r+s)+1.$$

Offenbar ist die Summe $m+n$ eine ungerade Zahl nach Definition 4.5, da $r+s$ eine ganze Zahl ist.

[a] Dieser Ausdruck wird verwendet, wenn in einem Beweis zwei oder mehr völlig analoge Fälle auftreten. In unserem Fall ist es wegen des Kommutativgesetzes für die Argumentation egal, ob der erste oder der zweite Summand gerade ist – die Rechnung verläuft in beiden Fällen völlig identisch.

4.4 Widerspruchsbeweis

Für einen Widerspruchsbeweis nimmt man die Voraussetzung sowie die Negation der Behauptung an und zeigt dann, dass diese sich widersprechen, also nicht beide gültig sein können. Dann muss die Negation der Behauptung falsch und die Behauptung selbst damit wahr sein.

Dieses Prinzip beruht, wie die Kontraposition, auf einer Erkenntnis aus der Aussagenlogik. Wie wir in den Übungen zur Aussagenlogik gesehen haben, gilt:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

Die Aussage, die rechts vom Äquivalenzpfeil ($\Leftrightarrow$) steht, ist genau das Prinzip des Widerspruchsbeweises: Um „A impliziert B“ zu zeigen, beweisen wir, dass nicht sowohl A als auch $\neg B$ gelten können.

Zuletzt zeigen wir nun unseren Satz über Primzahlen mithilfe eines Widerspruchsbeweises. Die Teile des Satzes lauteten folgendermaßen:

Voraussetzung: Sei n eine natürliche Zahl größer als 1.
Behauptung: Dann hat n einen Teiler, der eine Primzahl ist.

Beweis 3: Angenommen, es gibt natürliche Zahlen größer als 1, für die die Behauptung nicht gilt. Sei n die kleinste solche Zahl. Dann kann n keine Primzahl sein, da sonst n selbst ein Primteiler von n und daher die Behauptung für n doch erfüllt wäre. Nach Definition 4.3 ist n also zusammengesetzt und besitzt einen Teiler $a \in \mathbb{N}$ mit $1 < a < n$.
Nach unserer Festlegung ist n die kleinste Zahl, für die die Behauptung nicht gilt. Weil a eine natürliche Zahl größer als 1 und kleiner als n ist, muss die Behauptung also für a gelten. Also hat a einen Primteiler, diesen bezeichnen wir mit p.
Es gilt $p|a$ und $a|n$, also gilt auch, dass p ein Teiler von n ist.[a] Also ist die Behauptung für n doch erfüllt, obwohl wir festgelegt hatten, dass n eine Zahl ist, für die die Behauptung nicht gilt. Wir erhalten also einen Widerspruch, daher war unsere Annahme falsch und jede natürliche Zahl größer als 1 besitzt einen Primteiler.

[a] Diese Implikation wird in den Übungen noch einmal genauer betrachtet.

Bemerkung: Eine Folgerung aus diesem Satz ist, dass jede natürliche Zahl größer als 1 vollständig als ein Produkt von Primzahlen geschrieben werden kann. Diese Primfaktorzerlegung ist sogar eindeutig. Den mathematischen Satz, der die Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung formuliert, nennt man aufgrund der tiefgreifenden Erkenntnis, die er über die Zusammensetzung der natürlichen Zahlen liefert, den *Fundamentalsatz der Arithmetik* – und wir haben ihn gerade zur Hälfte bewiesen!

4.5 Ergänzungen

Neben der „Wenn-Dann“-Aussage gibt es noch andere Formen, in denen mathematische Sätze aufzutauchen pflegen. Manche Sätze sind *Existenzsätze* der Form „Es gibt ein Element, das die Bedingung … erfüllt“. Ein solcher Satz könnte beispielsweise so lauten:

Satz 4.7

Es existiert eine Zahl kleiner als 1 in den natürlichen Zahlen.
Oder in Quantorenschreibweise: $\exists k \in \mathbb{N} : k < 1$

Hier ist die Bedingung, dass die Zahl kleiner ist als 1. Für den Beweis eines solchen Satzes reicht es ein Element anzugeben, welches die Bedingung erfüllt. In diesem Fall würde die Aussage $k = 0$ erfüllt die Aussage als Beweis genügen, da $0 < 1$. Im Allgemeinen ist dies aber nicht der Fall! Beispiele sind im Allgemeinen keine Beweise! Eine weitere Art mathematischer Sätze sind *Eindeutigkeitssätze* der Form „Ein Element, das die Bedingung … erfüllt, ist eindeutig bestimmt“.

Satz 4.8

Für jedes Element in den ganzen Zahl existiert genau ein inverses Element.
Oder in Quantorenschreibweise: $\forall a \in \mathbb{Z} \exists! a^{-1} \in \mathbb{Z} : a + a^{-1} = 0$

Hier bedeutet $\exists!$, dass *genau* ein Element existiert. Es gibt beispielsweise nur ein inverses Element von der 1, nämlich die -1. Möchte man einen solchen Eindeutigkeitssatz beweisen, so geht man meist davon aus, es gäbe zwei Elemente, welche die Bedingung erfüllen, und zeigt dann deren Gleichheit.

Zusätzlich zum Beweisen von Sätzen, ist das Widerlegen mathematischer Behauptungen eine nützliche Fähigkeit. Kann man eine Behauptung widerlegen, so weiß man, dass man sich mit einem Beweis nicht weiter auseinanderzusetzen braucht, da dieser nicht existieren kann. Dies geschieht oft mit Gegenbeispielen. Wenn wir Aussagen betrachten, die für alle Elemente gelten sollen, so genügt es ein Element zu finden, für das die Aussage unwahr ist. Betrachten wir beispielsweise die Behauptung „Jede Primzahl ist ungerade“: Wäre dies wahr müssten wir für alle Primzahlen zeigen, dass sie in der Form $2k+1$ geschrieben werden können, also ungerade sind. Um aber die Unwahrheit zu zeigen reicht es anzugeben, dass die 2 eine Primzahl ist und eine gerade Zahl ist. Die 2 ist also das Gegenbeispiel unserer Behauptung und beweist die Unwahrheit dieser.

Autoren dieses Kapitels:
2023: Lasse Heckelmann, Moritz Buhr
2016: Hannah Meyer
2015: Malte Fecht
2014: Tabea Henning, Hannes de Witt, Malte Behr
2012 - 2013: Ute Valeska Spreckels

5 Vollständige Induktion

Mit der Beweismethode der vollständigen Induktion lassen sich Aussagen der Form „Für alle natürlichen Zahlen gilt ...“ beweisen. Den Ausdruck, der für alle natürlichen Zahlen bewiesen werden soll bezeichnen wir abkürzend als $A(n)$.

Beispiele:

- $\forall n \in \mathbb{N} : (n+1)(n-1) = n^2 - 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N} : 5 \mid n^5 - n$.

Mittels vollständiger Induktion beweisbaren Aussagen haben also allgemein die Form

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n).$$

Wir nennen $A(n)$ bewusst einen *Ausdruck* und keine *Aussage*, da $A(n)$ erst beim Einsetzen fester Werte für n zu einer konkreten Aussage wird. Dies wird besonders deutlich beim Betrachten der (falschen) Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N} : 3n = 6.$$

Hier steht $A(n)$ für „$3n = 6$“. Je nach eingesetztem Wert ergeben sich verschiedene Wahrheitswerte:

- $A(1)$ entspricht der falschen Aussage $3 \cdot 1 = 6$
- $A(2)$ entspricht der wahren Aussage $3 \cdot 2 = 6$

5.1 Motivation

Die erste eingeführte Behauptung lässt sich bereits mittels Ausmultiplizieren beweisen, denn es gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)(n-1) = n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1.$$

Hierfür brauchen wir keine neue Beweismethode einzuführen. Die zweite Behauptung bereitet uns jedoch mehr Schwierigkeiten. Wir können natürlich einzelne Zahlen einsetzen und uns damit von der Glaubwürdigkeit der Behauptung überzeugen:

- Für $n = 0$ ist $n^5 - n = 0^5 - 0 = 0 = 5 \cdot 0$ durch 5 teilbar ✓
- Für $n = 1$ ist $n^5 - n = 1^5 - 1 = 0 = 5 \cdot 0$ durch 5 teilbar ✓
- Für $n = 2$ ist $n^5 - n = 2^5 - 2 = 30 = 5 \cdot 6$ durch 5 teilbar ✓
- ...

Nun haben wir $A(0)$, $A(1)$ und $A(2)$ verifiziert. Für einen Beweis ist dieses Vorgehen jedoch ungeeignet, da es unendlich viele natürliche Zahlen gibt und es unmöglich ist, sie alle einzeln zu untersuchen. Hier kommt die Idee der vollständigen Induktion ins Spiel, welche wir durch eine Analogie erläutern möchten: Stelle dir eine Reihe von Dominosteinen vor. Diese Reihe beginnt irgendwo im Raum und sei unendlich lang. Die Steine sind der Reihe nach durchnummeriert, der erste Stein steht für $A(0)$, der zweite für $A(1)$ und so weiter. Wir gehen davon aus, dass beim Fallen eines Dominosteins die ihm zugewiesene Aussage bewiesen ist. Die Frage ist nun: Wie kriegen wir alle Steine zum Umfallen? Als Antwort fallen uns zwei Kriterien ein:

1. Bringe den ersten Stein zum Fallen.
2. Stelle sicher, dass beim Umfallen eines beliebigen Steins auch sein Nachfolger fällt.

Diese Erkenntnisse übertragen wir im Folgenden wieder in die Mathematik.

5.2 Aufbau

Führen wir diese Erkenntnis zurück auf unser ursprüngliches Problem, so erkennen wir folgende Lösungsschritte:

1. Zeige, dass $A(0)$ erfüllt ist.
2. Zeige, dass unter der Annahme, dass $A(k)$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, auch $A(k+1)$ gilt.

Dass durch das Zeigen dieser beiden Kriterien die Aufgabe gelöst ist, kannst du folgendermaßen erkennen: In Schritt 1 wird gezeigt, dass die Behauptung für $n = 0$ wahr ist. Wenn wir nun dieses Wissen in Punkt 2 mit $k = 0$ einfließen lassen, so erkennen wir, dass die Behauptung auch für $k+1 = 0+1 = 1$ erfüllt ist. Wenden wir nochmals Punkt 2 an, erhalten wir die Gültigkeit von $A(2)$ aus der von $A(1)$ und so weiter. Zum Ende dieses Abschnittes können wir also obige Behauptung beweisen:

Lösungsschritt 1 Obwohl bereits gezeigt, führen wir den Beweis der Aussage für $n = 0$ erneut auf: Es ist $0^5 - 0 = 0$ durch 5 teilbar ✓

Lösungsschritt 2 Wir gehen davon aus, dass die Aussage für ein $k \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen ist. Gehen wir also davon aus, dass $k^5 - k$ durch 5 teilbar ist. Wir müssen nun die Aussage für $k+1$ beweisen. Zeige also, dass $(k+1)^5 - (k+1)$ durch 5 teilbar ist. Dazu formen wir um:

$$\begin{aligned}(k+1)^5 - (k+1) &= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 \\ &= k^5 - k + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k \\ &= \underbrace{k^5 - k}_{\text{nach Annahme durch 5 teilbar}} + \underbrace{5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)}_{\text{offenbar durch 5 teilbar}}\end{aligned}$$

Nun können wir erkennen, dass dann auch $(k+1)^5 - (k+1)$ durch 5 teilbar ist. ✓

Damit haben wir unsere erste vollständige Induktion durchgeführt. An dieser Stelle halten wir noch einmal formal das Beweisschema fest. Soll die Formel $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen bewiesen werden, dann genügen dazu zwei Beweisschritte:

1. der *Induktionsanfang*: der Beweis von $A(0)$
2. der *Induktionsschritt*: der Beweis der *Induktionsbehauptung* $A(k+1)$ mit Hilfe (!) der *Induktionsvoraussetzung* $A(k),\ k \in \mathbb{N}$

5.3 Beweis der Gaußschen Summenformel

Die gaußsche Summenformel, auch „kleiner Gauß“ genannt, ist eine Formel zur Berechnung der Summe der ersten n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Angeblich hat der neunjährige Carl Friedrich Gauß[9] diese wiederentdeckt und damit seinem Lehrer ein Schnippchen geschlagen:

> „Der junge Gauss war kaum in die Rechenclasse eingetreten, als Büttner die Summation einer arithmetischen Reihe aufgab. Die Aufgabe war indess kaum ausgesprochen als Gauss die Tafel mit den im niedern Braunschweiger Dialekt gesprochenen Worten auf den Tisch wirft: »Ligget se’.« (Da liegt sie.)“[10]

Es gibt verschiedene Methoden, diese Formel zu beweisen. Wir führen hier den Beweis mittels vollständiger Induktion auf. Dabei halten wir uns genau an das gerade eingeführte Schema. Nach diesem (oder dem Schema deines jeweiligen Dozenten) solltest du dich ebenfalls stets richten.

Satz 5.1 (Gaußsche Summenformel)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2 + n}{2}$$

[9] Johann Carl Friedrich Gauß; deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker.
[10] Sartorius von Waltershausen: Gauss zum Gedächtnis. 1856, S. 12

Beweis 4:

Induktionsanfang

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0^2+0}{2} \checkmark$$

Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzung:

Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$, das heißt

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k^2+k}{2}.$$

Induktionsbehauptung:

Zu zeigen ist

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}.$$

Induktionsbeweis:

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1)$$

Jetzt verwenden wir die Induktionsvoraussetzung (IV) und erhalten

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1) &\overset{IV}{=} \frac{k^2+k}{2} + (k+1) \\
&= \frac{k^2+k}{2} + \frac{2k+2}{2} \\
&= \frac{k^2+3k+2}{2} \\
&= \frac{(k^2+2k+1)+(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)^2+(k+1)}{2} \checkmark
\end{aligned}$$

Wir haben also die Induktionsbehauptung mittels der Induktionsvoraussetzung gezeigt.

5.4 Abschließende Bemerkungen

Zum Anschluss dieses Kapitels wollen wir noch einige Bemerkungen zur vollständigen Induktion aufführen. Zunächst ist diese Beweistechnik (gerade anfangs) fehleranfällig, was allerdings mit einer sorgfältig eingehaltenen Notation oftmals verhindert werden kann. Mehr noch kann man die Induktion in den meisten Fällen mittels „Schema F“ durchführen und kommt manchmal viel eher zum Ziel als bei anderen Beweisarten.

Bevor man eine vollständige Induktion durchführen kann, braucht man natürlich eine Vermutung (Gleichung / Ungleichung / Teilbarkeit / ...), die gezeigt werden soll.

Manchmal lässt sich eine gegebene Aussage nur für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq m$ zeigen, wobei m eine natürliche Zahl größer als 0 ist. Auch hierfür können wir vollständige Induktion verwenden, jedoch in einer leicht abgewandelten Form: Statt im Induktionsanfang $A(0)$ zu zeigen, zeigen wir $A(m)$. In unserer Dominostein-Analogie entspricht dies statt dem Umwerfen des ersten Steines dem Umwerfen des Steins, welcher m Schritte danach kommt. Der Induktionsschritt stellt aber auch hier wieder sicher, dass alle Nachfolger von Stein m umfallen. Dazu ein Beispiel:

Lemma 5.2

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : 2^n > n + 1$$

Beweis 5:

Induktionsanfang

Es gilt

$$2^2 = 4 > 3 = 2 + 1. \checkmark$$

Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzung:

Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$, das heißt

$$2^k > k + 1.$$

Induktionsbehauptung:

Zu zeigen ist

$$2^{k+1} > (k+1) + 1.$$

Induktionsbeweis:

Es gilt zunächst

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k.$$

Auf diesen Ausdruck lässt sich die Induktionsvoraussetzung anwenden:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2^k &\overset{IV}{>} 2 \cdot (k+1) \\ &= (k+1) + (k+1) \\ &> (k+1) + 1 \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also die Induktionsbehauptung.

Als letztes sei erwähnt, dass Induktionen neben der vollständigen auch in anderen Formen vorkommen, denen ihr im Laufe eures Studiums noch begegnen werdet. So gibt es beispielsweise eine Form, bei der man die zu zeigende Aussage für 1 bis n voraussetzt und dann auf die Gültigkeit der Aussage für $n+1$ schließt. Was jedoch alle Induktionsarten gemein haben, ist die Tatsache, dass im Induktionsschritt stets die Induktionsvoraussetzung verwendet wird.

Autoren dieses Kapitels:

2023: Lasse Heckelmann, Moritz Buhr

2016: Hannah Meyer

6 Gleichungen

6.1 Lineare Gleichungen

Definition 6.1 (Lineare Gleichung)

Eine **lineare Gleichung** (mit einer Unbekannten) hat die Struktur:

$$ax + b = 0$$

Hierbei sind $a, b \in \mathbb{R}$ vorgegebene Konstanten (mit $a \neq 0$) und x die Variable oder **Unbekannte**. Die Unbekannte taucht in der lineare Gleichung nur in erster Potenz ($x = x^1$) auf.

Um die Gleichung zu lösen, kann sie leicht umgeformt werden:

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ \Leftrightarrow ax &= -b \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

Visualisiert man die linke Seite der Gleichung als Funktion, so gibt a die Steigung und b die Verschiebung auf der y-Achse an. Das gesuchte x gibt dann die **Nullstelle** der Funktion an.

Beispiel: Die Funktion $\frac{1}{2}x - 1$ hat eine Steigung von $\frac{1}{2}$ und eine Verschiebung auf der y-Achse um -1. Die Nullstelle ist $x_0 = \frac{-b}{a} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

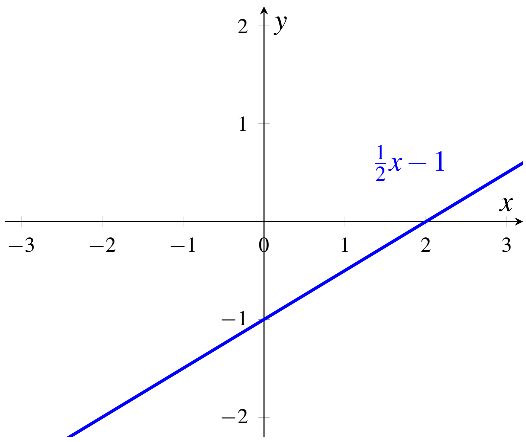


Abbildung 7: Lineare Funktion

6.2 Quadratische Gleichungen

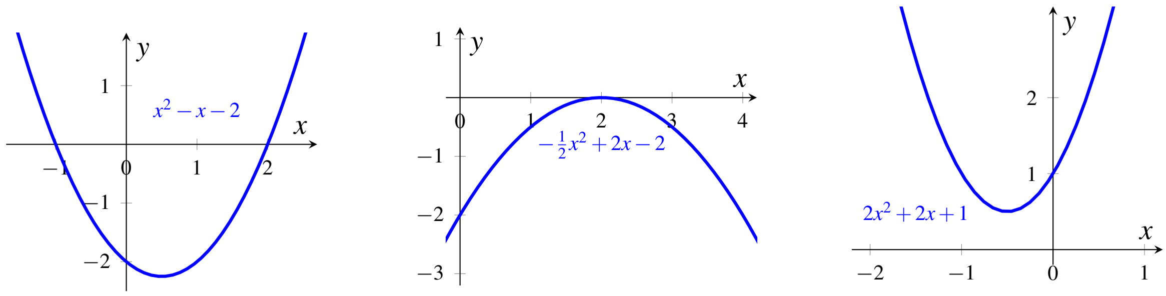
Definition 6.2 (Quadratische Gleichung)

Eine **quadratische Gleichung** (mit einer Unbekannten) hat die Struktur:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Hierbei sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ vorgegebene Konstanten (mit $a \neq 0$) und x die Variable oder **Unbekannte**.

Wenn wir die linke Seite der Gleichung wieder als Funktion darstellen und die Nullstellen herausfinden wollen, so ergeben sich grundsätzlich drei Möglichkeiten: Es gibt zwei, eine oder keine Nullstelle (s. Abb. 8).



(a) zwei Nullstellen (b) eine Nullstelle (c) keine Nullstelle

Abbildung 8: Quadratische Funktion

Um die Unbekannten einer quadratischen Gleichung arithmetisch zu bestimmen, gibt es verschiedene Ansätze, die wir im Folgenden betrachten werden.

6.2.1 Linearfaktoren

Satz 6.3 (Linearfaktoren einer quadratischen Funktion)
Eine quadratische Funktion ax^2+bx+c mit Nullstellen x_1 und x_2 gilt:

$$ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)$$

Aus diesen **Linearfaktoren** können die Nullstellen direkt abgelesen werden.

Beispiel: Die oben in Abb. 8(a) dargestellte Funktion lässt sich in Linearfaktoren zerlegen:

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

Hierbei sind also die Nullstellen: $x_1=-1$ und $x_2=2$. Wie man diese berechnen kann, wird nachfolgend erklärt.

6.2.2 Binomische Formeln

Quadratische Gleichungen mit einem bestimmten Aufbau können mit den binomischen Formeln umgeformt werden. Da diese sehr häufig angewandt werden können, sollte man sie stets im Kopf haben. Sie lassen sich jedoch auch schnell durch einfaches Ausmultiplizieren herleiten.

Lemma 6.4 (Binomische Formeln)
Durch Ausmultiplizieren ergeben sich die folgenden drei binomischen Formeln:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad \text{(1. bin. Formel)}$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \quad \text{(2. bin. Formel)}$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \quad \text{(3. bin. Formel)}$$

Beispiele:

- $0 = x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 \overset{1.bin.F.}{=} (x+2)^2$ besteht aus zweimal dem selben Linearfaktor. Das heißt diese Gleichung besitzt eine *doppelte Nullstelle* bei $x_1 = x_2 = -2$. Betrachtet man also die Funktion, würde der Scheitelpunkt (in diesem Fall das Minimum) der Parabel genau auf der x-Achse bei $(-2, 0)$ liegen.
- $0 = -4x^2 + 9 = 9 - 4x^2 \overset{3.bin.F.}{=} (3-2x)(3+2x)$ besitzt die Lösungen $x_1 = -\frac{3}{2}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$. Man beachte, dass in diesem Beispiel vor der Anwendung der dritten binomischen Formel das Kommutativgesetz genutzt werden muss.

6.2.3 Der Satz von Viëta

Satz 6.5 (Der Satz von Viëta)
Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat genau dann die Lösungen x_1 und x_2, wenn gilt

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Beweis 6: Genau dann, wenn x_1 und x_2 die Nullstellen der Gleichung $x^2 + px + q$ sind, lässt sich die Gleichung wie folgt in Linearfaktoren zerlegen:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= (x - x_1)(x - x_2) \\ &= x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \end{aligned}$$

Somit gilt genau dann auch $p = -(x_1 + x_2)$ und $q = x_1 x_2$.

Beispiel: Für $x^2 - 5x + 6 = 0$ ist $p = -5$ und $q = 6$.
Als passende Nullstellen x_1 und x_2 erweisen sich 2 und 3, denn es gilt $2 + 3 = -(-5)$ und $2 \cdot 3 = 6$.
So ergeben sich die Linearfaktoren $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

Bemerkung: Für den Fall, dass der konstante Koeffizient $q = 0$ ist, die Gleichung also die Form $x^2 + px = 0$ hat, sind die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -p$, da $x^2 + px = x(x+p)$.

6.2.4 Quadratische Ergänzung

Bei der quadratischen Ergänzung wird die erste binomische Formel genutzt und danach die Wurzel gezogen, um die Nullstellen zu finden:

$$\begin{aligned}
& x^2+px+q=0 && |-q \\
\Leftrightarrow\ & x^2+px=-q && \Big|+\left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2 && |\text{1. bin. Formel} \\
\Leftrightarrow\ & \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2 && |\sqrt{\cdot}\quad \text{(Achtung: Zwei Lösungen)} \\
\Leftrightarrow\ & x_{1,2}+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2} && \Big|-\frac{p}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2} && (pq\text{-Formel})
\end{aligned}$$

Auf diese Weise haben wir die pq**-Formel** hergeleitet, die wir nun auf einige Beispiele anwenden:

Beispiele:

Für $x^2-5x+6=0$ ist $p=-5$ und $q=6$.
Setze in pq-Formel ein:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{-5}{2}\pm\sqrt{-6+\left(\frac{-5}{2}\right)^2} \\
&= \frac{5}{2}\pm\sqrt{-6+\frac{25}{4}} \\
&= \frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{5}{2}\pm\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x_1=3\wedge x_2=2
\end{aligned}$$

Für $0=x^2+4x+4$ ist $p=4$ und $q=4$.
Setze in pq-Formel ein:

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{4}{2}\pm\sqrt{-4+\left(\frac{4}{2}\right)^2} \\
&= -2\pm\sqrt{-4+\frac{16}{4}} \\
&= -2\pm\sqrt{0} \\
&= -2
\end{aligned}$$

Hat man jedoch eine Gleichung der Form $0=ax^2+bx+c$ mit $a\neq 1$, muss diese zunächst durch a geteilt werden, damit die pq-Formel angewandt werden kann. Genau dies wird bei der abc**-Formel** genutzt:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Beispiel: Für $2x^2 + 2x + 1$ gilt $a = 2,\ b = 2,\ c = 1$.
Setze in *abc*-Formel ein:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{4} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{4}
\end{aligned}
$$

Da hier der Radikant -8 negativ ist, kann keine Wurzel gezogen werden und es gibt keine Lösung.

Zusammenfassend können wir sagen, dass die Anzahl a der Lösungen von dem Radikanden r aus der *pq*- beziehungsweise *abc*-Formel (der sogenannten *Diskriminanten*) abhängt:

$$
a = \begin{cases} 2 & \text{falls } r > 0 \\ 1 & \text{falls } r = 0 \\ 0 & \text{falls } r < 0 \end{cases}
$$

Beispiele für alle drei Fälle wurden bereits oben gegeben.

6.3 Polynomgleichungen

Definition 6.6 (Polynomgleichung)

Eine **Polynomgleichung** (mit einer Unbekannten) hat die Struktur:

$$
\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0
$$

Hierbei sind die a_i die sogenannten **Koeffizienten**, wobei $a_n \neq 0$.
Der Term auf der linken Seite wird als **Polynom** bezeichnet.
Die Zahl n, die den größten Exponenten angibt, wird als **Grad** des Polynoms bezeichnet.

Die Polynomgleichung ist also die Verallgemeinerung der zuvor vorgestellten Gleichungen. Die lineare Gleichung hat den Grad 1 und die quadratische den Grad 2.

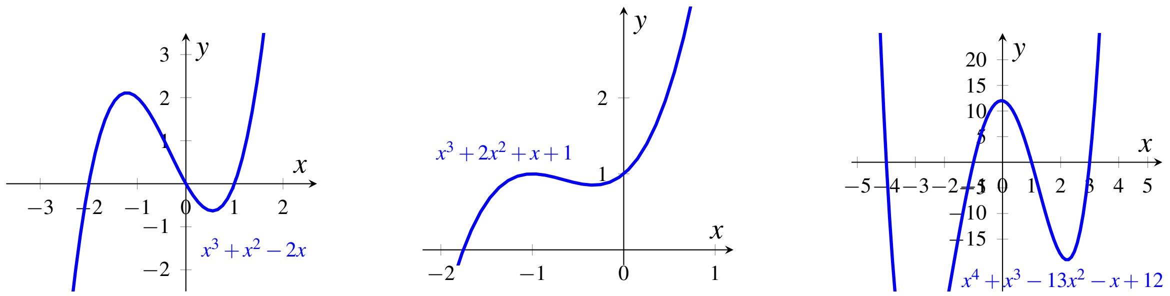
Lemma 6.7 (Anzahl Nullstellen)

Ein Polynom mit Grad n hat maximal n Nullstellen.

Das Lemma ergibt sich aus der Linearfaktorzerlegung des Polynoms.

Wir können ein Polynom auch als Polynomfunktion darstellen (s. Abb. 9).

Wir wissen bereits, wie sich die Nullstellen von Polynomgleichungen mit Grad 1 und 2 berechnen lassen. Damit wir die bekannten Verfahren nutzen können, lernen wir im Folgenden, den Grad des Polynoms zu reduzieren.



(a) Grad 3, 3 Nullstellen (b) Grad 3, eine Nullstelle (c) Grad 4, 4 Nullstellen

Abbildung 9: Polynomfunktionen

6.4 Polynomdivision

Um die Polynomdivision zum Reduzieren des Grades eines Polynoms nutzen zu können, muss eine Nullstelle bekannt sein. Gegeben ist also eine Polynomgleichung $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$ und eine Nullstelle x_1 der Gleichung. Indem man das Polynom wie beim schriftlichen Dividieren durch den Linearfaktor $(x - x_1)$ teilt, erhält man eine Polynomgleichung $\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i = 0$ vom Grad $n-1$, die (ggf. bis auf x_1) dieselben Lösungen wie die Ausgangsgleichung hat, da

$$0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = (x - x_1) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

und ein Produkt genau dann 0 ist, wenn einer der beiden Faktoren 0 ist.

Beispiele:

- Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel ohne konstanten Bestandteil: $x^3 + x^2 - 2x = 0$. Bei diesem ist offenbar $x_1 = 0$ eine Nullstelle, da in jedem Summanden x enthalten ist. Wir können also durch x teilen und erhalten die quadratische Gleichung $x^2 + x - 2 = 0$. Hier können wir z. B. mit dem Satz von Viëta die anderen beiden Nullstellen herausfinden: $x_2 = -2$ und $x_3 = 1$. Diese Funktion ist auch in Abb. 9(a) dargestellt.

- Haben wir jedoch einen konstanten Bestandteil, können wir die Polynomdivision richtig nutzen: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$. Dafür müssen wir zunächst eine Nullstelle finden (dazu probieren wir der Reihe nach zum Beispiel $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$):

  - $x = 0$ können wir ausschließen, da wir einen konstanten Bestandteil (die 6) haben.
  - $x = 1$ passt, da $1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$.

  Somit haben wir eine Nullstelle $x_1 = 1$, d. h. wir können durch den Linearfaktor $(x - 1)$ teilen.

$$\begin{array}{l}
\left(\quad x^3-2x^2-5x+6\right):\left(x-1\right)=x^2-x-6\\
\underline{-x^3\ \ +x^2}\\
\qquad -x^2-5x\\
\qquad \underline{\ \ x^2\ \ -x}\\
\qquad\qquad -6x+6\\
\qquad\qquad \underline{\ \ 6x-6}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Hierbei schauen wir zuerst, was herauskommt, wenn wir x^3 durch x teilen. Die Lösung x^2 schreiben wir schon rechts neben das Gleichheitszeichen. Nun muss auch noch der Bestandteil -1 berücksichtigt werden. Daher rechnen wir $x^2 \cdot (-1)^= -x^2$. Da wir x^3-x^2 subtrahieren wollen, ergibt sich $-x^3+x^2$. Dann wird $(x^3-2x^2)+(-x^3+x^2)$ gerechnet. Das Ergebnis $-x^2$ wird unter den Trennstrich geschrieben. Dieses Verfahren wird fortgeführt, bis man den Rest 0 erhält.

Bei einer alternativen Schreibweise verzichtet man darauf das additive Inverse zu bilden, d. h. man schreibt x^3-x^2 unter das Polynom und merkt sich, dass man dies subtrahieren möchte.

Führen wir die Division bis zum Ende durch, erhalten wir die Faktoren: $(x-1)(x^2-x-6)$. Die übrigen Nullstellen sind dann $x_2=-2$ und $x_3=3$. Die Linearfaktorzerlegung ist also $(x-1)(x+2)(x-3)$.

- Für $x^3-3x^2-10x+24=0$ finden wir nach Ausprobieren die Nullstelle $x_1=2$ heraus. Wir dividieren also durch $(x-2)$:

$$\begin{array}{l}
\left(\quad x^3-3x^2-10x+24\right):\left(x-2\right)=x^2-x-12\\
\underline{-x^3+2x^2}\\
\qquad -x^2-10x\\
\qquad \underline{\ \ x^2\ \ -2x}\\
\qquad\qquad -12x+24\\
\qquad\qquad \underline{\ \ 12x-24}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Die übrigen Nullstellen sind $x_2=-3$ und $x_3=4$.

Autoren dieses Kapitels:

2016: Lars Elend

2007: Dorothea Strauer

7 Grundlagen der Linearen Algebra

An dieser Stelle wollen wir lineare Gleichungssysteme, wie man sie aus der Schule kennt, mit Matrizen lösen. *Gleichungssysteme* bestehen aus einer oder mehreren Gleichungen mit mindestens einer (gegebenenfalls mehr) Unbekannten.

$$\begin{aligned}
a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\
a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Gesucht ist eine Belegung der Unbekannten $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ mit Werten, so dass alle Gleichungen des Systems erfüllt sind. Ein Gleichungssystem kann man zum Beispiel zum Lösen der folgenden Aufgabe verwenden:

Beispiel: Tina kommt auf dem Bauernhof an einem Gehege vorbei, in dem sich ausschließlich Schweine und Hühner befinden. Sie zählt 50 Köpfe und 116 Beine in diesem Gehege. Wie viele Hühner und wie viele Schweine befinden sich dort?

Da Hühner zwei und Schweine vier Beine haben, können wir zwei Gleichungen formulieren. Hierbei bezeichnet x die Anzahl der Hühner und y die Anzahl der Schweine. Anschließend stellen wir beide Gleichungen nach x um.

$$\begin{array}{rccc}
\text{I:} & x+y=50 & |-y & \\
\text{II:} & 2x+4y=116 & |-4y & |:2 \\
\hline
\text{I}': & x=50-y & & \\
\text{II}': & x=58-2y & &
\end{array}$$

Nun setzen wir I' und II' gleich um y herauszubekommen:

$$\begin{aligned}
& 50-y=58-2y && |-50 \\
\Rightarrow\quad & -y=8-2y && |+2y \\
\Rightarrow\quad & y=8
\end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir auch x:

$$x = 50 - y = 50 - 8 = 42$$

Es befinden sich also 8 Schweine und 42 Hühner in dem Gehege. Das oben vorgestellte Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme wird jedoch gerade bei größeren Gleichungssystemen mit vielen Unbekannten schnell unübersichtlich. Eine Alternative bietet dann das Lösen mittels Matrizen. Wie dies funktioniert stellen wir in Kapitel 7.2 vor. Zunächst werden wir im folgenden Kapitel Matrizen einführen.

7.1 Grundlagen der Matrizenrechnung

Im Folgenden werden wir definieren, was wir unter einer Matrix verstehen.

Definition 7.1 (Matrix)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine **Matrix**[11] A ist formal eine rechteckige Anordnung von Objekten in tabellarischer Form. Man schreibt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei a_{ij} den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte bezeichnet. Diese Einträge können Zahlen oder auch andere Objekte (Polynome, Funktionen, etc.) sein.

Bei einer Matrix mit m Zeilen und n Spalten spricht man von einer *$m \times n$-Matrix*. Sollen alle Einträge der $m \times n$-Matrix A aus einer Menge M sein, so schreibt man auch $A \in M^{m \times n}$. Falls $m = n$ gilt, so handelt es sich um eine *quadratische Matrix*. Wie Zahlen lassen sich auch Matrizen miteinander addieren und multiplizieren. Wie dies definiert ist, stellen wir im Folgenden vor.

Bemerkung: Matrizen werden üblicherweise mit Großbuchstaben $A, B, C, \ldots$ bezeichnet.

Bemerkung: Matrizen der Form $m \times 1$ bzw. $1 \times m$ – also Matrizen, die nur aus einer Spalte bzw. Zeile bestehen – werden auch als *Vektoren* (Spalten- bzw. Zeilenvektoren) bezeichnet.

7.1.1 Matrizenaddition

Die Addition geschieht auf folgende Weise:

Definition 7.2 (Matrizenaddition)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Für $m \times n$-Matrizen A und B definiere die **Summe**

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Addition zweier Matrizen erfolgt also, indem die Einträge jeweils addiert werden. Hierbei spricht man von *komponentenweiser* Addition.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 11 & 13 & 15 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

[11] Der Plural lautet *Matrizen*

Bemerkung: Für Matrizen ungleicher Größe (d.h. ungleicher Zeilen- oder Spaltenanzahl) ist die Summe nicht definiert!

7.1.2 Matrizenmultiplikation

Die Multiplikation geschieht nach folgendem Muster:

Definition 7.3 (Matrizenmultiplikation)

Seien $m,n,l \in \mathbb{N}$. Seien A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times l$-Matrix. Das **Produkt** dieser beiden Matrizen ist definiert als

$$
\begin{aligned}
A \cdot B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} \\
&:= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{11} \cdot b_{1l} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{nl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{m1} \cdot b_{1l} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{nl} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Bei der Multiplikation erhält man also den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der entstehenden Matrix, indem man die Einträge der i-ten Zeile der ersten Matrix mit denen der j-ten Spalte der zweiten multipliziert und dann addiert. Damit man hierbei nicht durcheinander kommt, hilft es, sich die Matrizen nach dem *Falkschen Schema* aufzuschreiben:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{il} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{ml} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Für den Eintrag c_{ij} gilt dann wie oben beschrieben $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Beispiel:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 49 \end{pmatrix}
$$

Bemerkung: Damit das Produkt $A \cdot B$ definiert ist, muss die Spaltenanzahl von A gleich der Zeilenanzahl von B sein! Die Größe der entstehenden Matrix ist dann „Zeilenanzahl von A“ $\times$ „Spaltenanzahl von B“.

Bemerkung: Achtung! Im Allgemeinen ist Matrizenmultiplikation *nicht* kommutativ, d.h. in der Regel gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$. Oft sind nicht einmal beide Produkte definiert.

7.2 Umformung von Gleichungssystemen

Wir sind nun in der Lage, Gleichungssysteme als Produkte von Matrizen zu formulieren. Für unser Gleichungssystem aus dem Bauernhof-Beispiel

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad x + y &= 50 \\ \text{II:} \quad 2x + 4y &= 116 \end{aligned}$$

können wir schreiben

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 116 \end{pmatrix},$$

denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 1 \cdot y \\ 2 \cdot x + 4 \cdot y \end{pmatrix}.$$

Allgemein schreiben wir Gleichungssysteme nun als

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{=:\,A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{=:\,x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{=:\,b}.$$

Ziel ist es also, bei vorgegebenen Werten in A und b Werte in x zu finden, sodass die Gleichung erfüllt ist. Im nächsten Schritt werden wir sehen, dass dies ganz einfach möglich ist, sobald A eine spezielle Gestalt besitzt.

Definition 7.4 (Einheitsmatrix)

Eine quadratische Matrix, deren Einträge $a_{ij} = 1$ für $i = j$ und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$ sind, nennt man **Einheitsmatrix**. Eine solche Matrix hat also auf der Hauptdiagonalen Einsen und ansonsten Nullen. Einheitsmatrizen werden meist durch E, E_n oder I_n (für „identity“) abgekürzt, wobei n der Anzahl an Zeilen beziehungsweise Spalten entspricht.

Beispiel:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$ für jede Matrix gilt, wobei die oben erwähnte Voraussetzung für die Multiplikation erfüllt sein muss. Dies stellt eine Besonderheit der Einheitsmatrizen dar. Sie sind *neutral* bezüglich Multiplikation. Betrachtet man die Gleichung

$$Ex = b,$$

so sehen wir schnell alle Lösungen, denn nach obiger Überlegung gilt $Ex = x$ und die einzige Lösung der Gleichung ist $x = b$. Auch Gleichungen der Form

$$Ax = b$$

mit einer beliebigen Matrix A wollen wir deshalb auf diese Form bringen. Hierzu *invertieren* wir die Matrix A, was im nächsten Abschnitt thematisiert wird.

7.2.1 Invertieren von Matritzen

Das Ziel beim Invertieren von A ist das Finden einer Matrix B mit $B \cdot A = E = A \cdot B$. Die Gleichung vereinfacht sich dann zu

$$\begin{aligned} && Ax &= b \\ \Leftrightarrow && B \cdot Ax &= B \cdot b \\ \Leftrightarrow && Ex &= B \cdot b \\ \Leftrightarrow && x &= B \cdot b \end{aligned}$$

und wir können wieder eine Lösung ablesen. Da wir nur Äquivalenzumformungen benutzt haben, ist $x = B \cdot b$ sogar die einzige Lösung von $Ax = b$. Wir wollen solche Matrizen B definieren.

Definition 7.5 (Inverse Matrix)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine Menge mit $0 \in M$ und $1 \in M$.
Eine Matrix $A \in M^{n \times n}$ heißt **invertierbar** in $M^{n \times n}$, falls es eine Matrix $B \in M^{n \times n}$ gibt, sodass $A \cdot B = E_n = B \cdot A$. Die Matrix B nennen wir dann die **inverse Matrix** oder auch die Inverse von A, geschrieben A^{-1}.

Satz 7.6

Falls eine Matrix A invertierbar ist, so ist ihre inverse Matrix eindeutig, d.h. es gibt genau eine Matrix A^{-1}, sodass $A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A$.

Beweis 7: Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt zwei verschiedene Matrizen B und C, die jeweils inverse Matrizen von A sind. Dann gilt:

$$B = B \cdot E_n = B \cdot A \cdot C = E_n \cdot C = C\ .$$

Folglich ist die Annahme, dass B und C nicht gleich sind, falsch.

Wie bestimmt man inverse Matrizen? Das Inverse einer Matrix ist nicht leicht zu sehen, zum Beispiel ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Um die Inverse zu berechnen, wurde deshalb ein allgemein gültiger Algorithmus entwickelt – der Gauß-Jordan-Algorithmus.

Satz 7.7 (Gauß-Jordan-Algorithmus)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine Menge mit $0 \in M$ und $1 \in M$. Sei weiter $A \in M^{n \times n}$. Formt man A mit den folgenden Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix E_n um und wendet man die gleichen Zeilenumformungen in gleicher Reihenfolge auf die Einheitsmatrix an, so erhält man die inverse Matrix von A. Die Zeilenumformungen sind

- Multiplikation der i-ten Zeile einer Matrix mit einem invertierbaren Skalar $\lambda \in M$ $(1 \leq i \leq n)$
- Addition des λ-fachen der k-ten Zeile einer Matrix zur i-ten Zeile $(1 \leq k, i \leq n,\ k \neq i,\ \lambda \in M)$
- Vertauschen der i-ten und k-ten Zeile einer Matrix $(1 \leq i, k \leq n)$.

Zunächst wollen wir anhand eines kleinen Beispiels verstehen, was die einzelnen Operationen bewirken und wie wir sie sinnvoll aufschreiben können:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} && \text{(Zeilentausch)} \\ &\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 3 \cdot Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} && \text{(Addition)} \\ &\xrightarrow{Z_2 \to \frac{1}{2} \cdot Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{(Multiplikation)} \end{aligned}$$

Wir wollen nun den Gauß-Jordan-Algorithmus an unserem Bauernhof-Beispiel nachvollziehen. Das zu lösende Gleichungssystem lautete

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

Ziel ist also die Invertierung der Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden den Gauß-Jordan-Algorithmus an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 2 \cdot Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 \to \frac{1}{2} \cdot Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - 1 \cdot Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenden wir die selben Schritte auf E_2 an, so erhalten wir C^{-1}:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 2 \cdot Z_1} \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 \to \frac{1}{2} \cdot Z_2} \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - 1 \cdot Z_2} \begin{pmatrix}2 & -\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Zur Sicherheit ist es immer wichtig, das Ergebnis zu überprüfen, also die Matrix mit dem berechneten Inversen zu multiplizieren und zu überprüfen, ob man die Einheitsmatrix erhält. In diesem Fall gilt tatsächlich

$$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

und

$$C^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix}2 & -\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wie wir am Beispiel gesehen haben, müssen wir jede Operation zweimal durchführen. Man kann sich hier mit geschickter Notation ein wenig Arbeit ersparen! Schreibt man am Anfang die Einheitsmatrix direkt neben die Matrix, die man invertieren will. Auf diese Weise kann man die einzelnen Operationen immer gleichzeitig an beiden Matrizen durchführen, also in unserem Beispiel:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_2 - 2 * Z_1} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 1\end{array}\right) \dots$$

$$\dots \xrightarrow{Z_2 \to Z_1 - 1 \cdot Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2}\end{array}\right).$$

Am Ende steht dann links die Einheitsmatrix und rechts die Inverse.

Die einzige Lösung unseres linearen Gleichungssystems berechnet sich nach den obigen Ausführungen wie folgt:

$$C^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix}2 & -\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}50\\ 116\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}42\\ 8\end{pmatrix}.$$

Noch immer befinden sich in Tinas Gehege 42 Hühner und 8 Schweine.

Bemerkung: Wenn man nicht an der inversen Matrix von A interessiert ist, kann man sich auch hier etwas Arbeit sparen. Anstatt die inverse Matrix zu berechnen, indem man $(A|E)$ umformt in $(E|A^{-1})$, kann man auch $(A|b)$ in $(E|c)$ umformen, wobei c dann die gewünschte Lösung ist. Für obiges Beispiel dann wie folgt:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}50\\ 116\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 50\\ 2 & 4 & 116\end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 2 \cdot Z_1} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 50\\ 0 & 2 & 16\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 \to \frac{1}{2} \cdot Z_2} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 50\\ 0 & 1 & 8\end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - 1 \cdot Z_2} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 42\\ 0 & 1 & 8\end{array}\right)$$

Wir fassen dieses Verfahren zu einem allgemeinen Satz zusammen:

Satz 7.8

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei b eine $n \times 1$-Matrix und A eine $n \times n$-Matrix. Lässt sich die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ mittels Zeilenumformungen umformen zu $(E_n|c)$ für eine $n \times 1$-Matrix c, dann ist c die einzige Lösung der Gleichung
$Ax = b$. Dies ist genau dann der Fall, wenn A invertierbar ist. Außerdem gilt dann $c = A^{-1}b$.

Beweis 8: An dieser Stelle verzichten wir noch auf den Beweis des Satzes, der dann in der Linearen Algebra geführt werden wird.

Autoren dieses Kapitels:

2016: Hannah Meyer
2015: Hannes de Witt, Malte Fecht, Linda Feeken
2014: Tabea Henning, Hannes de Witt, Malte Behr
2013: Hendrik Bodenstein
2012: Matthias Hans

8 Abbildungen

Abbildungen werden auf zwei verschiedene Weisen benutzt. In der Analysis stehen sie selbst im Mittelpunkt und es wird versucht, möglichst viele Informationen über jene zu erlangen. In der Algebra sind Abbildungen eher ein Hilfsmittel. Sie dienen dazu, Mengen und ihre Eigenschaften zu vergleichen. In einfachster Form bezieht sich dieses auf die Mächtigkeit verschiedener Mengen (Anzahl der Elemente), aber auch die Wirkungsweise von Rechenvorschriften lassen sich über Abbildungen vergleichen. Dieses Skript wendet sich vor allem dem Vergleich von Mengen zu.

8.1 Erste Definitionen

Definition 8.1 (Abbildung)

Seien M und N nicht-leere Mengen. Eine **Abbildung** f von M nach N ist eine Vorschrift, die jedem $x \in M$ genau ein $f(x) \in N$ zuordnet.
Schreibe: $f: M \to N$.
Ist f reellwertig – gilt also $N \subseteq \mathbb{R}$ – so heißt f auch **Funktion**.

So kann man etwa jeder reellen Zahl ihr Quadrat zuordnen. Dies ist eine Funktion von den reellen Zahlen in eine Teilmenge der reellen Zahlen. Funktionen lassen sich auf zwei Arten beschreiben:

1. $f(x) = y$, für obiges Beispiel $f(x) = x^2$.
2. $x \mapsto y$, für obiges Beispiel $x \mapsto x^2$.

Bemerkung: Im Zuge dessen sei auch darauf hingewiesen, dass $f(x)$ immer nur einen Funktionswert beschreibt, während f die Abbildung selbst ist. Man sagt also: „Die Abbildung f nimmt in x den Funktionswert $f(x)$ an.“

Einige zentrale Begriffe für Abbildungen werden wir folgend definieren.

Definition 8.2 (Definitionsbereich und Wertevorrat)

Sei $f: M \to N$ eine Abbildung. Dann heißt M der **Definitionsbereich** und N der **Wertevorrat** von f.

Der Definitionsbereich einer Abbildung f ist also die Menge der Elemente x, für die $f(x)$ definiert ist und der Wertevorrat ist eine Menge, die mindestens alle $f(x)$ enthält, sie kann aber auch viel größer sein.

Der Wertevorrat von f liefert noch keine genaue Information, welche Werte $f(x)$ existieren, sodass im Zusammenhang mit Abbildungen noch von zwei weiteren Begriffen, dem *Bild* und dem *Urbild*, Gebrauch gemacht wird:

Definition 8.3 (Bild und Urbild)

Sei $f\colon\ M \to N$ eine Abbildung.
Für $S \subseteq M$ heißt die Menge

$$f(S) := \{f(x) \mid x \in S\}$$

das **Bild** von S unter f. Für das Bild von M unter f spricht man auch kurz nur vom Bild von f.
Für $L \subseteq N$ heißt die Menge

$$f^{-1}(L) := \{x \mid f(x) \in L\}$$

das **Urbild** von L unter f.

Bemerkung: Häufig finden auch andere Begriffe für den Definitionsbereich, Wertevorrat und das Bild Anwendung. Statt Definitionsbereich wird auch der Begriff *Definitionsmenge* benutzt. Anstelle von Wertevorrat sagt man auch *Wertebereich* oder *Wertemenge* und für den Begriff des Bildes sind auch *Bildbereich*, *Wertebereich* und *Wertemenge* geläufig. Stellenweise werden sogar noch andere Begriffe genutzt. Schon an dieser kleinen Auswahl zeigt sich, dass die Begriffe nicht immer überschneidungsfrei sind. Bei mathematischen Texten muss man also sehr vorsichtig sein und sich zuerst vergewissern, welcher Begriff und damit auch, welche Definition dort gemeint ist.

Bemerkung: Beim Urbild ist insbesondere zu beachten, dass f^{-1} im Allgemeinen nicht etwa $\frac{1}{f}$ ist, sondern als völlig eigenständiges Symbol zu verstehen ist!

Beispiel: Betrachte die Abbildung $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.

- Der Definitionsbereich von f sind die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, genau wie der Wertevorrat. Das Bild $f(\mathbb{R})$ besteht aber nur aus allen nicht-negativen reellen Zahlen, da x^2 für alle $x \in \mathbb{R}$ nicht-negativ ist.
- Das Urbild $f^{-1}(\{0\})$ ist $\{0\}$, da $f(x) = 0$ nur für $x = 0$ gilt. Das Urbild $f^{-1}(\{1\})$ ist $\{-1, 1\}$, da $f(-1) = 1 = f(1)$ gilt. Das Urbild $f^{-1}(\{-1\})$ ist die leere Menge $\varnothing$.

8.2 Komposition von Abbildungen

Eine wichtige Hilfe zur Erstellung von Abbildungen bietet die *Komposition* von Abbildungen. So kann man diese nutzen, um das Finden einer Abbildung in Teilschritte zu unterteilen.

Definition 8.4 (Komposition)

Seien $f\colon\ M \to N$ und $g\colon\ S \to M$ Abbildungen. Die **Komposition** $f \circ g$ von f und g ist die Abbildung

$$f \circ g\colon\ S \to N, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Bemerkung: Es können nicht *beliebige* Abbildung miteinander kombiniert werden. Die Definition erfordert, dass der Definitionsbereich der Abbildung f das Bild der Abbildung g enthält.

Beispiel: Für $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ und $g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x+3$ gilt:

$$f\circ g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(x+3)^2=x^2+6x+9$$

Eine Beschreibung zur Erstellung der Abbildung $f\circ g$ könnte lauten: „Addiere zu jeder Zahl 3 und quadriere anschließend das Ergebnis.“

Diese Erklärung ist offenbar viel einfacher als „Quadriere jede Zahl, addiere dann ihr Sechsfaches dazu und addiere zu diesem Ergebnis noch einmal 9.“

Ein vermeintlicher Umweg ist hier also praktikabler.

Besonders ist darauf zu achten, dass anders als bei üblichen Verknüpfungen die Komposition von rechts nach links angewandt wird. Will man $(f\circ g)(x)$ berechnen, wendet man auf x zuerst die Definition von g und erst dann auf $g(x)$ die Definition von f an.

8.3 Injektivität und Surjektivität

In diesem Abschnitt gehen wir auf häufig genutzte Eigenschaften, die zur Beschreibung von Abbildungen genutzt werden, ein.

Definition 8.5 (Injektivität)

Eine Abbildung $f:\ M\to N$ heißt **injektiv**, falls für alle $x_1,x_2\in M$ gilt:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2\,.$$

Werden also zwei Elemente des Definitionsbereichs auf das selbe Element des Wertebereichs abgebildet, so müssen diese Elemente schon gleich gewesen sein.

Alternative Formulierung:

Für alle $y\in N$ existiert *höchstens* ein $x\in M$, sodass $f(x)=y$ gilt.

Mit Hilfe der Injektivität lässt sich folgendes Lemma formulieren:

Lemma 8.6 (Mächtigkeitenvererbung bei injektiven Abbildungen)

Sei $f:\ M\to N$ eine injektive Abbildung. Dann gilt $|M|\le|N|$.

Beweis 9: Für $|N| = \infty$ ist das Lemma trivial, da jede Zahl (sowie unendlich selbst) kleiner oder gleich unendlich ist.
Sei nun $|N| < \infty$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, ..., a_n \in N$, sodass $N = \{a_1, ..., a_n\}$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} M &= f^{-1}(N) \\ &= f^{-1}(\{a_1, \dots, a_n\}) \\ &\overset{\text{Übung}}{=} f^{-1}(\{a_1\}) \cup \dots \cup f^{-1}(\{a_n\}) \\ \Rightarrow |M| &= |f^{-1}(\{a_1\}) \cup \dots \cup f^{-1}(\{a_n\})| \\ &\leq |f^{-1}(\{a_1\})| + \dots + |f^{-1}(\{a_n\})| \\ &\overset{f \text{ injektiv}}{\leq} \underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} \\ &= n = |N| \end{aligned}$$

Somit ist das Lemma vollständig gezeigt.

Über die Injektivität von Abbildungen kann also die Mächtigkeit des Wertebereiches nach unten bzw. des Definitionsbereiches nach oben abschätzt werden. Die andere Richtung liefert die Surjektivität.

Definition 8.7 (Surjektivität)
Eine Abbildung $f: M \to N$ heißt **surjektiv**, falls gilt:

$$f(M) = N$$

Das Bild und der Wertevorrat von f müssen also übereinstimmen.
Alternative Formulierung:

Für alle $y \in N$ existiert *mindestens* ein $x \in M$, sodass $f(x) = y$ gilt.

Wie angekündigt lässt sich nun folgendes Lemma formulieren:

Lemma 8.8 (Mächtigkeitenvererbung bei surjektiven Abbildungen)
Sei $f: M \to N$ eine surjektive Abbildung. Dann gilt: $|N| \leq |M|$

Beweis 10: Für $|M| = \infty$ ist das Lemma analog zum Beweis von Lemma 8.6 klar.
Sei nun $|M| < \infty$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in M$, sodass gilt: $M = \{a_1, \dots, a_n\}$.
Weiter gilt:

$$\begin{aligned} N &\overset{f \text{ surjektiv}}{=} f(M) = f(\{a_1, \dots, a_n\}) \overset{\text{Übung}}{=} f(\{a_1\}) \cup \dots \cup f(\{a_n\}) \\ \Rightarrow |N| &= |f(\{a_1\}) \cup \dots \cup f(\{a_n\})| \le |f(\{a_1\})| + \dots + |f(\{a_n\})| \\ \Rightarrow |N| &\le |f(\{a_1\})| + \dots + |f(\{a_n\})| = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} = n \\ \Rightarrow |N| &\le n = |M| \, . \end{aligned}$$

Somit ist das Lemma vollständig bewiesen.

Für eine injektive und surjektive Abbildung ergibt sich damit $|M| = |N|$. Da diese Eigenschaft besonders häufig gesucht ist, bekommen diese Abbildungen einen weiteren Namen:

Definition 8.9 (Bijektivität)
Eine Abbildung $f: M \to N$ heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

8.3.1 Anwendung - Messen von Unendlichkeit

Aus der Definition der bijektiven Abbildung kann direkt ein großer Nutzen für die differenziertere Betrachtung des Unendlichen hergeleitet werden. Hier stellt man sich die Frage: „Ist wirklich jedes Unendlich gleich groß?“. Beispielsweise haben die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ zwar beide unendlich viele Elemente, aber trotzdem scheint $\mathbb{R}$ viel größer.

Definition 8.10 (Abzählbarkeit von Mengen)
Eine Menge M heißt **höchstens abzählbar**, wenn es eine injektive Abbildung f von M nach $\mathbb{N}$ gibt.
Existiert keine solche Abbildung, dann ist M **überabzählbar**.
Existiert sogar eine bijektive Abbildung g von M nach $\mathbb{N}$, so heißt M **abzählbar** und es gilt $\#M = \infty$.

Wir merken abschließend noch ohne Beweis an, dass $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$ abzählbar und $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ überabzählbar sind.

Autoren dieses Kapitels:

2016: Lars Elend
2014-2015: Tabea Henning, Hannes de Witt, Malte Behr
2012-2013: Hannes de Witt

Stichwortverzeichnis