Lösungen zu Übungszettel 5 — Beweismethoden

1. (a) Beweisen Sie direkt: $n^2 + n$ ist für beliebige natürliche Zahl n gerade.
Beweis (direkt): Mit Fallunterscheidung:
1. Fall: n gerade, also $n = 2k$ (wobei $k \in \mathbb{N}$)
Damit: $n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$
Da $(2k^2 + k) \in \mathbb{N}$, ist $2(2k^2 + k)$ gerade.
2. Fall: n ungerade, also $n = 2k + 1$ (wobei $k \in \mathbb{N}$)
Damit: $n^2 + n = (2k + 1)^2 + 2k + 1 = 2(2k^2 + 3k + 1)$
Da $(2k^2 + 3k + 1) \in \mathbb{N}$, ist $2(2k^2 + 3k + 1)$ gerade. $\square$

(b) Beweisen Sie durch Kontraposition: Ist für zwei natürliche Zahlen m und n das Produkt $m \cdot n$ gerade, dann ist m gerade oder n gerade.
Beweis (durch Kontraposition): Zu Zeigen ist $\neg B \Rightarrow \neg A$, also:
$\neg(m \text{ gerade } \vee n \text{ gerade }) \Rightarrow \neg(m \cdot n \text{ gerade })$
$\Leftrightarrow m \text{ ungerade } \wedge n \text{ ungerade } \Rightarrow m \cdot n \text{ ungerade}$
Damit: m ungerade: $m = 2k + 1$, n ungerade: $n = 2l + 1$
Es folgt: $m \cdot n = (2k + 1) \cdot (2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2 \cdot (2kl + k + l) + 1$
Da $2 \cdot (2kl + k + l)$ durch 2 teilbar, also gerade ist $2 \cdot (2kl + k + l) + 1$ ungerade. $\square$

(c) Beweisen Sie durch Widerspruchsbeweis: Ist n^2 gerade, so ist n gerade (wobei $n \in \mathbb{N}$).
Beweis (durch Widerspruch): Zeige $A \wedge \neg B \rightarrow \perp$:
Gehe also aus von $\neg B$, also n ungerade.
Dann ist $n = 2k + 1$ und $n^2 = (2k + 1)(2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1$
Da $4k^2 + 4k$ gerade, ist $4k^2 + 4k + 1$ ungerade. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

(d) Finden Sie ein Gegenbeispiel: $3n + 9 > n^2$ (wobei $n \in \mathbb{N}$)
Gegenbeispiel:
(Die Behauptung gilt nur für $n \leq 4$.)
Für $n = 5$ gilt $3n + 9 = 3 \cdot 5 + 9 = 24 \leq 25 = n^2$, d. h. die obige Ungleichung wird nicht erfüllt. $\square$

(e) Finden Sie ein Gegenbeispiel: Wenn n gerade, dann ist $n^2 + 2$ durch 3 teilbar. ($n \in \mathbb{N}$)
Gegenbeispiel: $n = 6$: $n^2 + 2 = 36 + 2 = 38$.
3 teilt allerdings nicht 38, weswegen die Annahme widerlegt ist.
ODER: $n = 0$: $n^2 + 2 = 0 + 2 = 2$.
3 teilt allerdings nicht 2, weswegen die Annahme widerlegt ist.

2. Können Sie die im folgenden gegebenen Aussagen direkt, durch Kontraposition oder durch einen Widerspruchsbeweis beweisen, oder können Sie ein Gegenbeispiel finden? Falls die Aussage beweisbar ist, führen Sie einen Beweis mit beliebiger Methode durch, falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Ist die natürliche Zahl m ungerade, so ist $m^2 + 7$ durch 8 teilbar.
Beweis (direkt): m ungerade, also: $m = 2k + 1$ (wobei $k \in \mathbb{N}$).
Damit: $m^2 + 7 \ = \ (2k + 1)^2 + 7 \ = \ 4k^2 + 4k + 1 + 7 \ = \ 4k^2 + 4k + 8$
8 ist durch 8 teilbar, daher betrachte nur noch $4k^2 + 4k$:
$4k^2 + 4k \ = \ 4(k^2 + k)$
Durch 0.1a ist bekannt, dass $(k^2 + k)$ gerade ist, also: $(k^2 + k) = 2 \cdot x$
Damit: $4(k^2 + k) = 4 \cdot 2 \cdot x = 8 \cdot x$ $\square$

(b) **Zusatzaufgabe:** Sei $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis (direkt):

kurze Variante (ohne Fallunterscheidung):

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad | \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} i = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Die Null ist irrelevant und wird daher im Folgenden weggelassen.
Schreibe die Summe untereinander aus (die zweite rückwärts).

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} i &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ & + n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \end{aligned}$$

Bilde Paare aus den übereinander stehenden Summanden. Jedes Paar hat die Summe $n + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + n \quad &= n + 1 \\ 2 + (n-1) &= n + 1 \\ 3 + (n-2) &= n + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es gibt (wenn die 0 nicht berücksichtigt wird) n Paare, also gilt:

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{n} i = n \cdot (n+1) \qquad | : 2$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$\square$

Anmerkung: Wenn 0 mit berücksichtigt wird, gibt es $(n + 1)$ Paare die jeweils die Summe n haben.

längere Variante (mit Fallunterscheidung):

Es ist gegeben: $\sum_{i=0}^{n} i = 0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$.
Die Null ist irrelevant und wird daher im Folgenden weggelassen.
Führe nun eine Fallunterscheidung durch (oder anderer Weg s. u.):

1. **Fall: n gerade:** Die Summe enthält eine gerade Anzahl Summanden. Bilde Paare:

$$\begin{aligned} 1 + n &= n + 1 \\ 2 + n - 1 &= n + 1 \\ 3 + n - 2 &= n + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es gibt $\frac{n}{2}$ solcher Paare, also ist $(n+1) \cdot \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ das Ergebnis der Summe.

2. **Fall: n ungerade:** Die Summe enthält eine ungerade Anzahl Summanden. Bilde Paare:

$$\begin{aligned} 1 + n &= n + 1 \\ 2 + n - 1 &= n + 1 \\ 3 + n - 2 &= n + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es gibt $\frac{n-1}{2}$ solcher Paare, aber der mittlere Summand $\frac{n+1}{2}$ bleibt alleine. also ist hier $(n+1) \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ das Ergebnis der Summe.

Lösungen zu Übungszettel 6 — Vollständige Induktion

1. (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

   Die Summe der ersten $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ungeraden Zahlen ist n^2, d.h. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

   Beweis (mit vollständiger Induktion):

   Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{1}(2i-1) &= 1^2\\ 2\cdot 1 - 1 &= 1\\ 1 &= 1\end{aligned}$$

   Induktionsvoraussetzung (IV):
   Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

   Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$:

$$\text{z. z.:}\quad \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) \stackrel{!}{=} (n+1)^2$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= \left[\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\right] + 2(n+1) - 1\\ &\stackrel{\text{IV}}{=} n^2 + 2(n+1) - 1\\ &= n^2 + 2n + 1\\ &= (n+1)^2\end{aligned}$$

2. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

   Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1 = \frac{1\cdot 4}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

   Induktionsvoraussetzung (IV):
   Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} &= \sum_{i=1}^{n+1} i^3 && (1)\\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} i^3\right] + (n+1)^3 && (2)\\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 && (3)\\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} && (4)\\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)(n+1)^2}{4} && (5)\\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4(n+1))}{4} && (6)\\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4n + 4)}{4} && (7)\\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4} && (8)
\end{aligned}$$

3. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$n^3 + 5n$$

durch 6 teilbar

Induktionsanfang (IA): Für $n = 0$:

$$\begin{aligned}
& 6 \mid (0^3 + 5 * 0) && (9)\\
\Leftrightarrow\ & 6 \mid 0\ \checkmark && (10)
\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 && (11)\\
&= (n^3 + 5n) + 3(n^2 + n) + 6 && (12)\\
& && (13)
\end{aligned}$$

Der erste Summand ist nach Induktionsvoraussetzung durch 6 teilbar, der letzte ist offensichtlich durch 6 teilbar.
Uns interessiert jetzt also nur noch, ob $3(n^2 + n)$ durch 6 teilbar ist. Auf dem ÜB "'Beweismethoden'" haben wir gezeigt, dass $n^2 + n$ stets gerade ist. Demnach ist auch $3(n^2 + n)$ und damit der gesamte Ausdruck durch 6 teilbar.