Lösungen zu Übungszettel 3 — Arithmetik

1. (a) Stellen Sie die Summen mit Hilfe des Summenzeichens dar:
   i. $6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 = \sum_{i=2}^{7} 3i$
   ii. $16 + 8a + 4a^2 + 2a^3 + a^4 = \sum_{i=0}^{4} 2^{4-i} a^i$
   iii. Verschieben Sie den Summenindex in Aufgabenteil (i) um 1 nach oben. Wie muss die Summe in Summenzeichenschreibweise dann notiert werden? $\sum_{i=3}^{8} 3(i-1)$

   (b) Stellen Sie die Produkte mit Hilfe des Produktzeichens dar:
   i. $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = \prod_{i=0}^{5}(1+2i)$
   ii. $\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{12}{17} \cdot \frac{15}{26} = \prod_{i=1}^{5} \frac{3i}{i^2+1}$

2. Erinnere dich daran, wie man den letzten Summanden aus einer Summe zieht. Führe dies für folgende Summen durch:

   (a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} (i+1)^2 \;=\; \sum_{i=0}^{n} (i+1)^2 \;+\; (n+2)^2$

   (b) $\displaystyle\sum_{s=0}^{n} (s+1) \;=\; \sum_{s=0}^{n-1} (s+1) \;+\; n+1$

   (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \left(\tfrac{i-1}{i} + 1\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{i-1}{i} + 1\right) \;+\; \tfrac{n}{n+1} + 1$

3. (a) Multiplizieren Sie aus, und fassen Sie, falls möglich, zusammen.
   i. $5(x+y+z) - 7(x-y+z) - 8(x+y-z)$
   $= 5x + 5y + 5z - 7x + 7y - 7z - 8x - 8y + 8z$
   $= -10x + 4y + 6z$
   $= 2(-5x + 2y + 3z)$
   ii. $69p + (13q - (17p + 11q)) - (11p - (13p - 17q))$
   $= 69p + 13q - 17p - 11q - 11p + 13p - 17q$
   $= 54p - 15q$
   $= 3(18p - 5q)$

   (b) Klammern Sie möglichst weit aus:
   i. $ax + bx + ay + by$
   $= x(a+b) + y(a+b)$
   $= (x+y)(a+b)$
   ii. $(a-b) \cdot (2x - 3y) - (a-b) \cdot (x - 3y)$
   $= 2ax - 3ay - 2bx + 3by - ax + 3ay + bx - 3by$
   $= ax - bx = (a-b)x$

4. (a) Bringen Sie die folgenden Terme auf einen Hauptnenner, und vereinfachen Sie, falls möglich.

i. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{x^2y} + \frac{6}{y^2} = \frac{xy^2 - x^2y + 2y + 6x^2}{x^2y^2}$

ii. $1 - \frac{1}{x-y} = \frac{x-y-1}{x-y}$

iii. $\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} - \frac{x-y}{(x-y)(x+y)} = \frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{2y}{x^2-y^2}$

5. (a) Fassen Sie mit Hilfe der Potenzgesetze zusammen:

   i. $(-a^{-1})(-a^{-1})(-a^{-1}) = (-a^{-1})^3 = -a^{-3}$

   ii. $b(ba^0)(a^0b)(a^0b)(b^1) = b^2(a^0b)^3 = b^2a^0b^3 = b^5$

6. (a) Unter welchen Bedingungen können folgende Zahlen Radikand einer Quadratwurzel sein? Geben Sie konkrete Definitionen für den Wert a an (z.B. $a \in \mathbb{N}, \ldots$).

$$+a, \ -a, \ -a^2, \ +a^3, \ -a^3, \ +(a-b), \ -(a-b)$$

   i. Für $+a$: $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

   ii. Für $-a$: $a \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$

   iii. Für $-a^2$: $-a^2$ kann nur für $a = 0$ Radikand einer Quadratwurzel sein

   iv. Für $+a^3$: $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

   v. Für $-a^3$: $a \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$

   vi. Für $+(a-b)$: $a, b \in \mathbb{R} \mid (a \geq b)$

   vii. Für $-(a-b)$: $a, b \in \mathbb{R} \mid (a \leq b)$

   (b) Addieren Sie:

   i. $6\sqrt{27} + 2\sqrt{108} - 7\sqrt{75} = 6\sqrt{9 \cdot 3} + 2\sqrt{36 \cdot 3} - 7\sqrt{25 \cdot 3} = -5\sqrt{3}$

Lösungen zu Übungszettel 4 — Gleichungen

1. (a) Multiplizieren Sie mit Hilfe der binomischen Formeln aus:
   i. $(2-6b)(2+6b) \;=\; -36b^2+4$
   ii. $(2+4b)^2 \;=\; 16b^2+16b+4$
   iii. $(-2a^2+13d)^2 \;=\; 4a^4-52a^2d+169d^2$

   (b) Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke als Produkt von Summen bzw. Differenzen.
   i. $49a^2+42ay+9y^2 \;=\; (7a+3y)^2$
   ii. $16a^2-72acy+81c^2y^2 \;=\; (4a-9cy)^2$
   iii. $9d^2-81g^2 \;=\; (3d+9g)(3d-9g)$

2. Ergänzen Sie die fehlenden Summanden:

   (a) $(d-\underline{6g})^2 = \underline{d^2} - 12dg + 36g^2$
   (b) $(3a+\underline{4c})^2 = 9a^2 + \underline{24ac} + 16c^2$
   (c) $(\underline{a}+5)^2 = \underline{a^2} + 10a + 25$
   (d) $(\underline{7d}-\underline{9e})^2 = 49d^2 - \underline{126de} + 81e^2$
   (e) $(d-\underline{3e})^2 = d^2 - 6de + \underline{9e^2}$
   (f) $(\underline{-x}-3x^2)^2 = \underline{x^2} + 6x^3 + \underline{9x^4}$

3. Geben sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen an.

   (a) $x^2-4x=0, \qquad x \in \{0,4\}$
   (b) $2x^3-5x^2=0, \qquad x \in \{0, \frac{5}{2}\}$
   (c) $x^2+2x-3=0, \qquad x \in \{-3,1\}$
   (d) $4x^2-4x+1=0, \qquad x \in \{\frac{1}{2}\}$
   (e) $x^2+4x+5=0, \qquad x \in \emptyset$
   (f) $x^3-x^2-4x+4=0, \qquad x \in \{-2,1,2\}$ (Polynomdivision zeigen)
   (g) $2x^3+8x^2+10x+4=0, \qquad x \in \{-1,-2\}$ (Polynomdivision zeigen)
   (h) $x^3-3x^2-4x+12=0, \qquad x \in \{-2,2,3\}$ (Polynomdivision zeigen)

4. (a) Geben Sie jeweils eine quadratische Gleichung in der Form $ax^2+bx+c=0$ an, die die folgenden Lösungen besitzt:
   i. $x_1=4,\ x_2=5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-9x+20=0$
   ii. $x_1=2+\sqrt{2},\ x_2=2-\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x+2=0$
   iii. $x_1=0,\ x_2=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-\frac{1}{2}x=0$
   iv. $x_1=x_2=-1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2x+1=0$

   (b) Stellen Sie folgende Ausdrücke als Produkt der Form $(x-a)(x-b)$ dar:
   i. $x^2-5x+6 \;=\; (x-2)(x-3)$
   ii. $x^2-x-20 \;=\; (x+4)(x-5)$
   iii. $x^2-18x+9 \;=\; (x-(9+\sqrt{72}))(x-(9-\sqrt{72})) = (x-(9+6\sqrt{2}))(x-(9-6\sqrt{2}))$
   iv. $x^2-16 \;=\; (x+4)(x-4)$