Lösungen zu Übungszettel 1 — Aussagenlogik

1. Gegeben seien die Aussagen B, R, T.

$$B := \text{“‘Das Buch ist ein Bestseller.’”}$$
$$R := \text{“‘Das Buch ist ein Roman.’”}$$
$$T := \text{“‘Das Buch ist teurer als 20 €.’”}$$

   (a) Überführen Sie folgende Aussagen in Aussagenlogik:

      i. “‘Das Buch ist ein Bestseller und nicht teurer als 20 €.’”
      $B \land \neg T$

      ii. “‘Das Buch ist ein Bestseller, aber es ist teurer als 20 €.’”
      $B \land T$

   (b) Verbalisieren Sie die folgenden Aussagenverknüpfungen:

      i. $T \lor \neg B$
      “‘Das Buch ist teurer als 20 € oder das Buch ist kein Bestseller.’”

      ii. $B \Rightarrow \neg R$
      “‘Wenn das Buch ein Bestseller ist, dann ist es kein Roman.’”

2. Beweise mit Wahrheitstafeln:

   (a) Beweisen Sie die Gültigkeit der Absorptions-Regel $A \lor (A \land B) \equiv A$.

A	B	$A \land B$	$A \lor (A \land B)$	$A \lor (A \land B) \Leftrightarrow A$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

   (b) Zeigen Sie, dass $\neg(A \land B) \equiv \neg A \land \neg B$ falsch ist.

A	B	$A \land B$	$\neg(A \land B)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \land \neg B$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

   (c) Ist $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ ein Widerspruch? Ist die Aussage eine Tautologie?
   Es handelt sich nicht um einen Widerspruch sondern um eine Tautologie:

A	B	C	$B \Rightarrow C =: D$	$A \Rightarrow D =: E$	$A \Rightarrow B =: F$	$A \Rightarrow C =: G$	$F \Rightarrow G =: H$	$E \Leftrightarrow H$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

3. Beweisen Sie durch Umformen: $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$
Beweis der Kontraposition:

$$
\begin{aligned}
& A \Rightarrow B && \mid \text{Implikationselimination} \\
\equiv\; & \neg A \lor B && \mid \text{Kommutativgesetz} \\
\equiv\; & B \lor \neg A && \mid \text{Doppelnegation} \\
\equiv\; & \neg\neg B \lor \neg A && \mid \text{Implikationsumformung} \\
\equiv\; & \neg B \to \neg A &&
\end{aligned}
$$

4. Beweisen Sie durch Umformen oder mit Wahrheitstafeln: $(A \Rightarrow B) \equiv \neg(A \land \neg B)$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$A \land \neg B$	$\neg(A \land \neg B)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

5. Beweisen Sie durch Umformen: $(A \Leftrightarrow B) \equiv \neg(A \land \neg B) \land (B \Rightarrow (A \land (A \lor B)))$

$$
\begin{aligned}
& A \Leftrightarrow B && \mid \text{Äquivalenzelimination} \\
\equiv\; & (A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A) && \mid \text{Implikationselimination} \\
\equiv\; & (\neg A \lor B) \land (B \Rightarrow A) && \mid \text{De Morgan} \\
\equiv\; & \neg(\neg\neg A \land \neg B) \land (B \Rightarrow A) && \mid \text{Doppelnegation} \\
\equiv\; & \neg(A \land \neg B) \land (B \Rightarrow A) && \mid \text{Absorbtionsregel} \\
\equiv\; & \neg(A \land \neg B) \land (B \Rightarrow A \land (A \lor B)) &&
\end{aligned}
$$

Lösungen zu Übungszettel 2 — Mengenlehre

1. (a) Geben Sie folgende Mengen in aufzählender Darstellung an.
   i. $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 5\} = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
   ii. $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 1\} = \{1\}$
   iii. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = -1\} = \{\}$

   (b) Geben Sie folgende Mengen in definierender Darstellung an.
   i. $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 9 \wedge x \text{ ungerade}\}$
   ii. $\{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x^2 \leq 4\}$
   iii. $\{-2, 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$

2. Überführen Sie die folgenden Aussagen in Quantorenschreibweise:

   (a) Es existiert ein x in den natürlichen Zahlen womit $5 + x = 2$ lösbar ist.
   $\exists x \in \mathbb{N} : 5 + x = 2$

   (b) Zu jeder natürlichen Zahl existiert eine natürliche Zahl, die grösser ist.
   $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} : y > x$

3. Gegeben sei die Menge $\Omega = \{5, \{\mathrm{Mo}, \mathrm{Di}\}, \emptyset\}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a)	$\mathrm{Mo} \in \Omega$	falsch	(b)	$\{\mathrm{Mo}, \mathrm{Di}\} \subset \Omega$	falsch	(c)	$\{5\} \in \Omega$	falsch
(d)	$\{5\} \subset \Omega$	richtig	(e)	$\{\mathrm{Mo}\} \subset \Omega$	falsch	(f)	$\emptyset \subset \Omega$	richtig
(g)	$\{\emptyset\} \subset \Omega$	richtig	(h)	$\emptyset \in \Omega$	richtig	(i)	$\{\emptyset\} \in \Omega$	falsch

4. Welche der Mengen $A_1, \ldots, A_6$ ist identisch mit einer der Mengen $B_1, \ldots, B_6$ (und mit welcher)?

   $A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \cdot x = 4\}$ $\qquad$ $B_1 = \{-2, 2\}$
   $A_2 = \{\}$ $\qquad$ $B_2 = \{0\}$
   $A_3 = \{2x \mid x \in \mathbb{Z},\ -1 \leq x \leq 1\}$ $\qquad$ $B_3 = \{2\}$
   $A_4 = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \cdot x = 4\}$ $\qquad$ $B_4 = \{0, 2\}$
   $A_5 = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x + x = 0\}$ $\qquad$ $B_5 = \{-2, 0, 2\}$
   $A_6 = \{2x \mid x \in \mathbb{N},\ -1 < x \leq 2\}$ $\qquad$ $B_6 = \emptyset$

   $A_1 = B_3, \quad A_2 = B_6, \quad A_3 = B_5, \quad A_4 = B_1, \quad A_5 = B_2, \quad A_6 \neq B_4$

5. Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ in der Grundmenge $\Omega = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$.

   (a) Geben Sie folgende Mengen an:

$$A \cup B = \Omega$$
$$A \cap B = \emptyset$$
$$A \cap \overline{B} = A$$
$$A \cap \overline{C} = \{1,\ 3\}$$
$$B \cap \overline{B} = \emptyset$$
$$A \cap (B \cup C) = A \cap \{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\} = \{5,\ 7,\ 9\}$$

(b) Bestimmen Sie die Menge derjenigen Elemente, die

(i) in genau einer
$M := \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

(ii) in genau zwei
$\Omega \backslash M$

(iii) in höchstens zwei
Ω

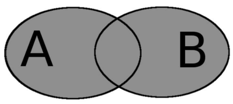
der Mengen A, B und C liegen.

(c) Wie muss die Grundmenge Ω sein, damit gilt $\overline{A \cup B \cup C} = \{11, 12\}$?
$\Omega = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 12\}$

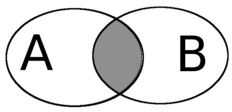
6. Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$. Wie viele Teilmengen gibt es?
Teilmengen:
$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$,
$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$,
$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$,
$\{\ \}$, $\{1, 2, 3, 4\}$.
Es gibt $2^4 = 16$ Teilmengen.

7. Seien A, B, C Teilmengen einer Grundmenge Ω. Stellen Sie die folgenden Mengen im Venn-Diagramm dar.

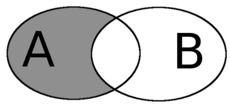
$A \cup B$:



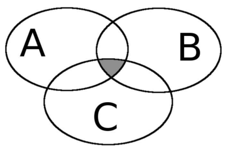
$A \cap B$:



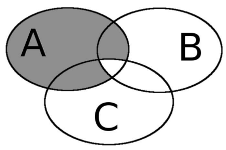
$A \cap \overline{B}$:



$A \cap B \cap C$:



$A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$:



$A \cap (B \cup C)$: